Grugliasco, 14 novembre 2008

Le difficoltà nell'apprendimento della matematica

Strategie per il recupero delle difficoltà

Rosetta Zan

Dipartimento di Matematica, Pisa

zan@dm.unipi.it

Gli incontri precedenti

- **Il processo di OSSERVAZIONE**
- L'epistemologia e la pedagogia dell'errore
- Il mito dell'oggettività degli errori
- Dagli errori ai comportamenti fallimentari
- **Il processo di INTERPRETAZIONE**
- L'apprendimento come attività costruttiva
- I misconcetti
- Le abilità metacognitive
- Pensiero logico e pensiero narrativo
- La pragmatica
- Le convinzioni
- Il fatalismo

In questo incontro

- **Breve riassunto delle puntate precedenti…**
- **Il problem solving**
- **Implicazioni per il recupero:**
  - **Osservazioni generali**
  - **Materiali ed esperienze:**
  - → Atteggiamenti negativi
  - → Abilità linguistiche e trasversali
  - → Abilità metacognitive
  - → Come si studia la matematica:
    - Definizioni
    - Dimostrazioni

In questo incontro

- **Breve riassunto delle puntate precedenti…**
- **Il problem solving**
- **Implicazioni per il recupero:**
  - ✓**Osservazioni generali**
  - ✓**Materiali ed esperienze:**
  - →Atteggiamenti negativi
  - →Abilità linguistiche e trasversali
  - →Abilità metacognitive
  - →Come si studia la matematica:
    - Definizioni
    - Dimostrazioni

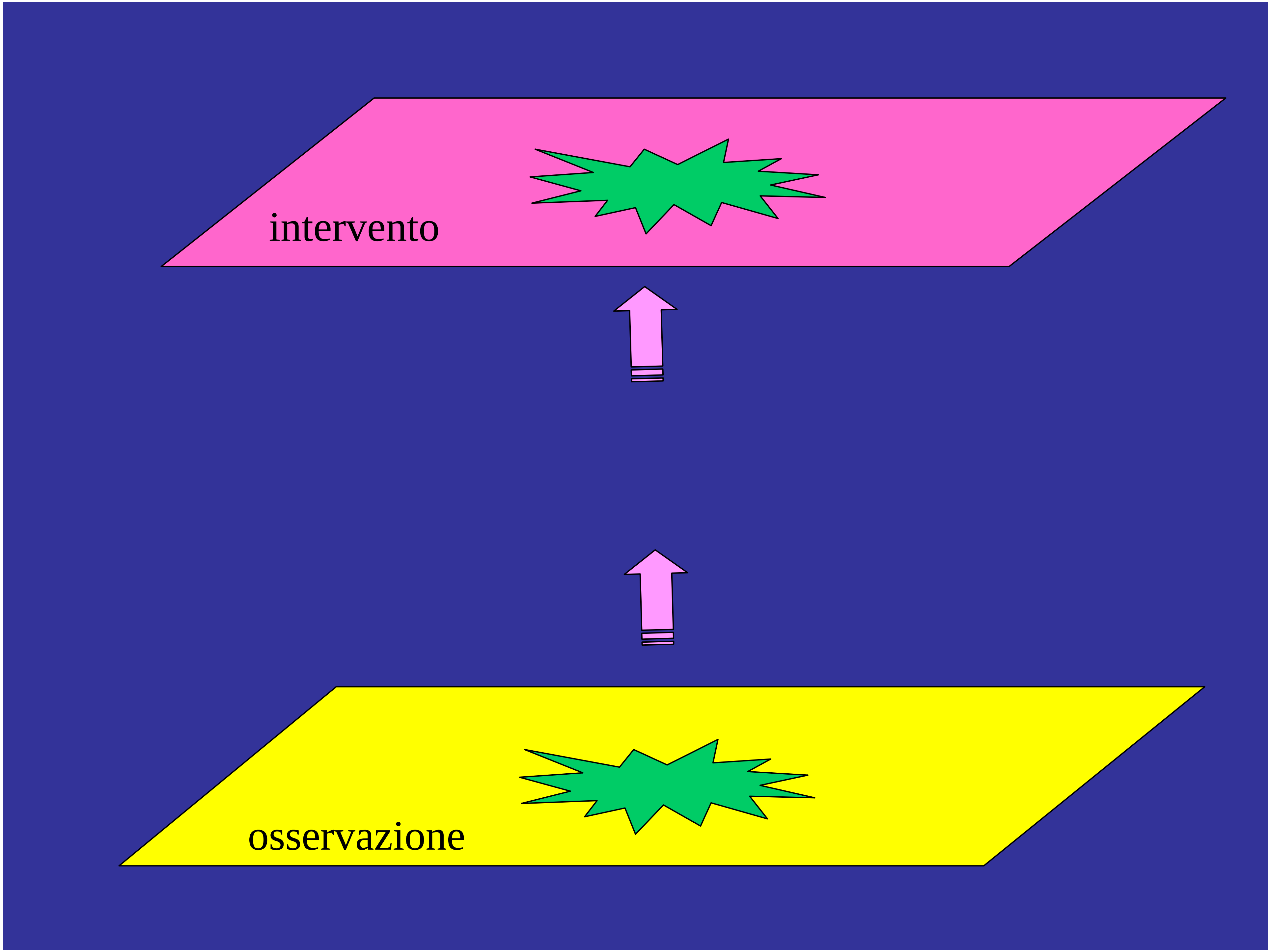
Grugliasco, 11 e 12 settembre 2007

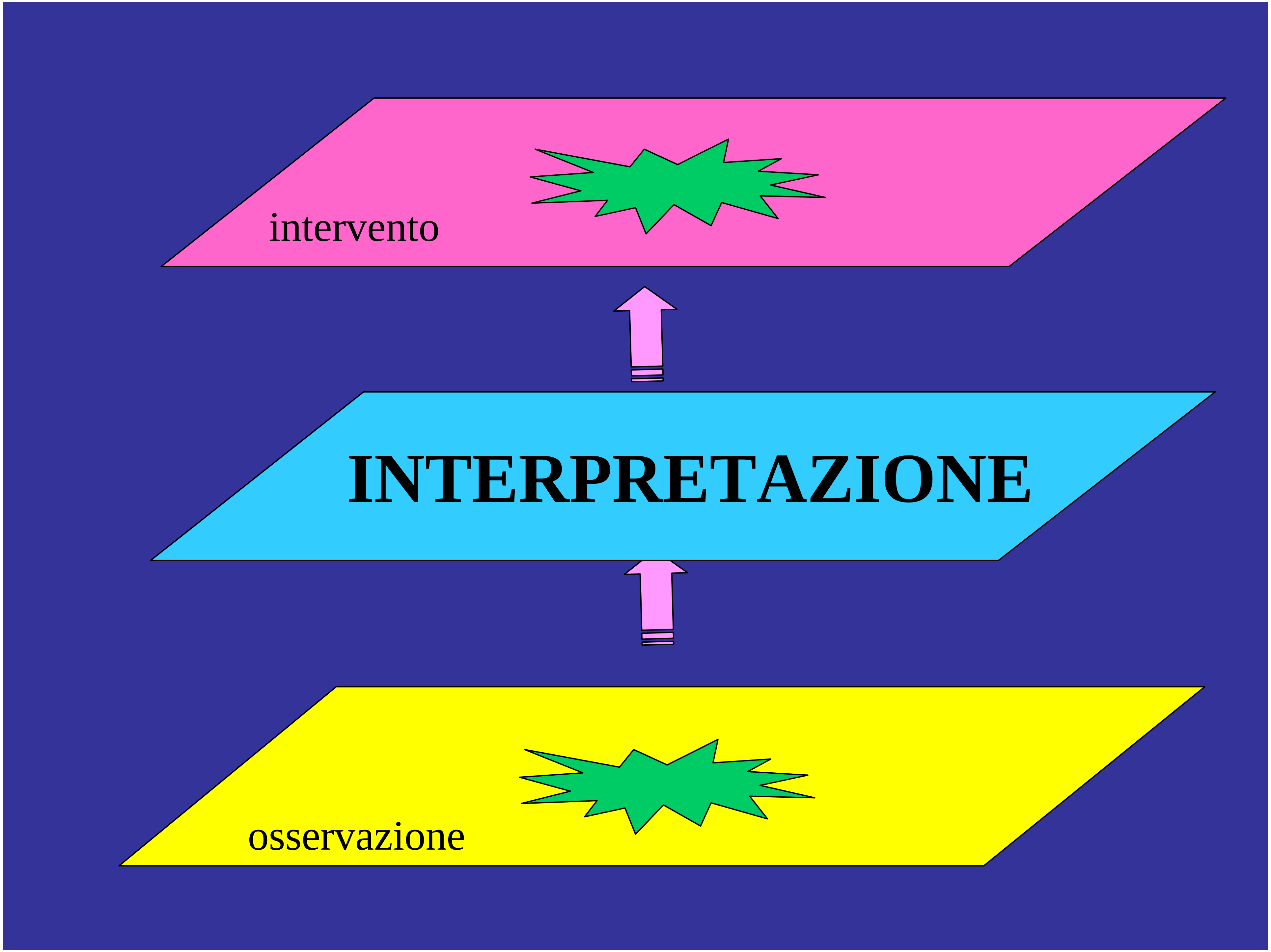
Viaggio fra miti e pratiche del recupero: verso un approccio alternativo

Rosetta Zan

Dipartimento di Matematica, Pisa

zan@dm.unipi.it


intervento
osservazione


intervento
INTERPRETAZIONE
osservazione

- non ha le conoscenze necessarie
- non ha le abilità necessarie

…non ‘sa’ abbastanza di *quel contesto*

INTERPRETAZIONE sottintesa

INTERVENTO

OSSERVAZIONE

- errori
- processi risolutivi inadeguati

risposte scorrette

INTERPRETAZIONE

...dovuti a

mancanza di conoscenze

INTERVENTO

Ipotesi:

Il fallimento dell'intervento tradizionale di recupero è dovuto al fatto che (essendo basato sull'ERRORE):

1. deriva da un'osservazione
   → che pretende di essere oggettiva,
   →ignora la complessità del processo di 'recupero'
2. è 'locale', cioè circoscritto:
   → al contesto in cui l'errore o il fallimento sono stati osservati
   → o addirittura agli argomenti (che l'insegnante ritiene) sufficienti per produrre una risposta corretta

INSEGNANTE

ALLIEVO

l’*insegnante* vuole che l’allievo modifichi i propri comportamenti

ma è l’*allievo* che deve modificarli

OSSERVAZIONE

- errori
- processi risolutivi inadeguati

↘ risposte scorrette

INTERPRETAZIONE

...dovuti a

mancanza di conoscenze

INTERVENTO

Ipotesi:

Il fallimento dell'intervento tradizionale di recupero è dovuto al fatto che (essendo basato sull'ERRORE):

1. deriva da un'osservazione

→ che pretende di essere oggettiva,

→ignora la complessità del processo di 'recupero'

2. è 'locale', cioè circoscritto:

→ al contesto in cui l'errore o il fallimento sono stati osservati

→ o addirittura agli argomenti (che l'insegnante ritiene) sufficienti per produrre una risposta corretta

INTERPRETAZIONE

...dovuti a

mancanza di conoscenze

INTERPRETAZIONE

Le parole più usate:

-"Non riesce …"

-"Non ha capito…"

-"Non ha le basi…"

-"Non si impegna"

l'interpretazione

~~giusta / sbagliata~~

è un'ipotesi di lavoro

funziona / non funziona

Perché l’interpretazione sia un’ipotesi di lavoro:

- Deve *dirigere*, e non *bloccare*, l’intervento
- ➢ Esempio: ‘non è in grado’
- Deve essere puntuale, e non generica
- ➢ Esempi:
  - ✓‘Non si impegna’
  - ✓‘Non ha le basi’
  - ✓‘Non capisce’
  - ✓‘Non ha metodo di studio’

l’interpretazione

~~giusta / sbagliata~~

è un’ipotesi di lavoro

funziona / non funziona

importanza per l’insegnante di avere un repertorio di interpretazioni possibili

L’apprendimento come attività costruttiva

1. I misconcetti e i modelli primitivi
2. La pragmatica
3. Pensiero logico / pensiero narrativo
4. Le convinzioni
5. Le emozioni
6. Il fatalismo

importanza per l’insegnante di avere un repertorio di interpretazioni possibili

Io non sono in grado
di controllare

La matematica
è ***di per sé*** incontrollabile

La matematica
è incontrollabile

FATALISMO

Rinuncia
a pensare

NON
RISPONDE

RISPONDE
A CASO

In questo incontro

- **Breve riassunto delle puntate precedenti…**
- **Il problem solving**
- **Implicazioni per il recupero:**
  - ✓**Osservazioni generali**
  - ✓**Materiali ed esperienze:**
  - →Atteggiamenti negativi
  - →Abilità linguistiche e trasversali
  - →Abilità metacognitive
  - →Come si studia la matematica:
    - Definizioni
    - Dimostrazioni

...PROBLEM SOLVING

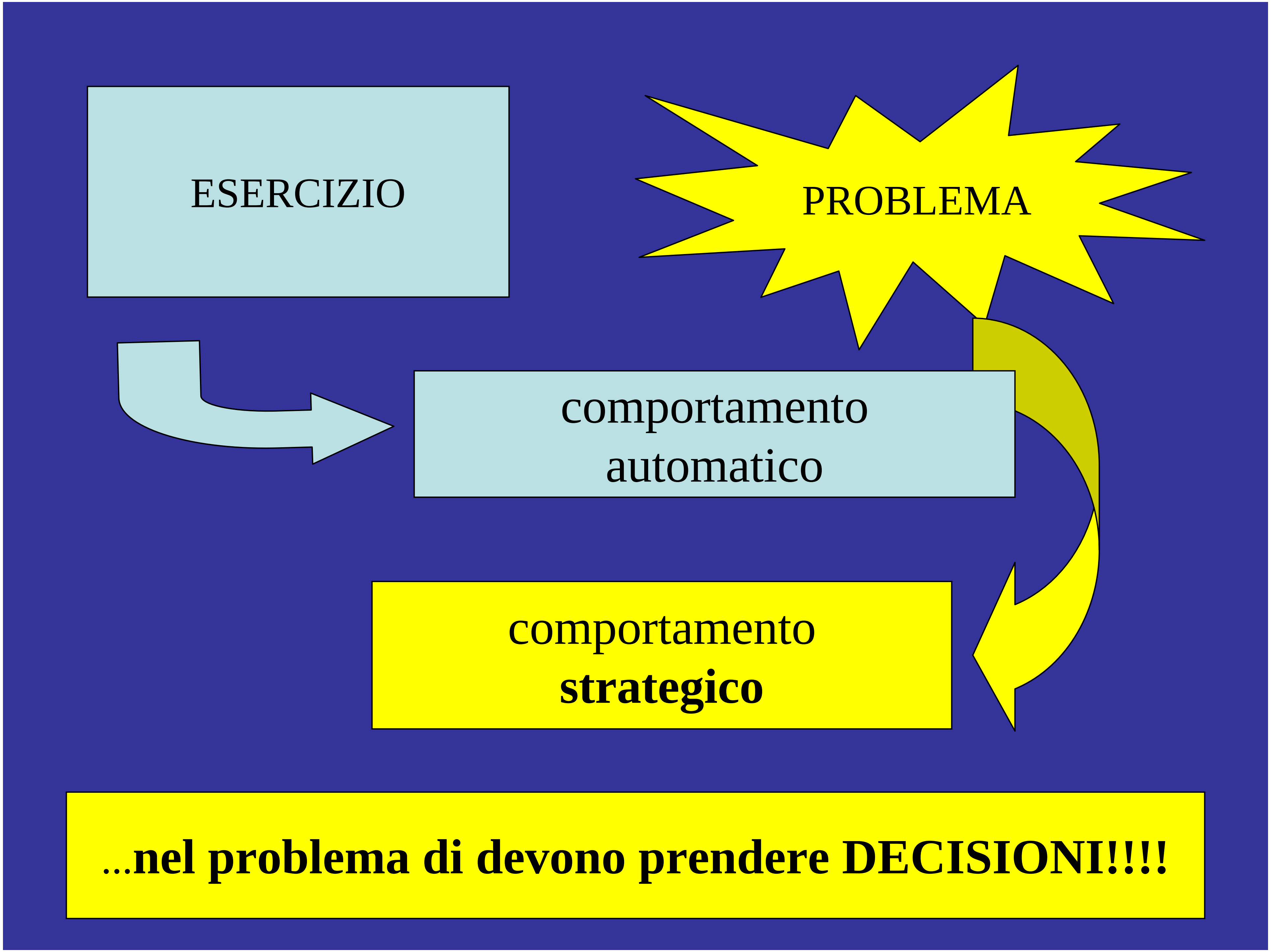
➘ problemi

Che cos'è un problema?

Un problema sorge
quando un essere vivente ha una meta
ma non sa come raggiungerla.

[Duncker, 1935]

problema / esercizio


ESERCIZIO
PROBLEMA
comportamento automatico
comportamento **strategico**
...**nel problema di devono prendere DECISIONI!!!!**

Il bravo solutore di problemi

Il ‘bravo’ solutore

- Ha le conoscenze necessarie
- Ha un repertorio di euristiche (Polya)

Le 4 fasi di un processo risolutivo:

- Si *comprende* il problema
- Si *compila un piano*
- Si *sviluppa* il piano
- Si procede alla *verifica*

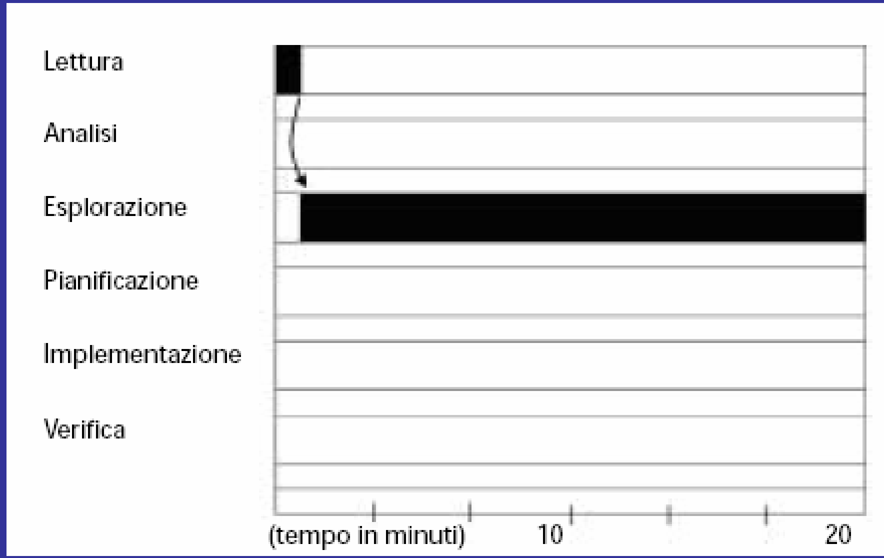
George Polya

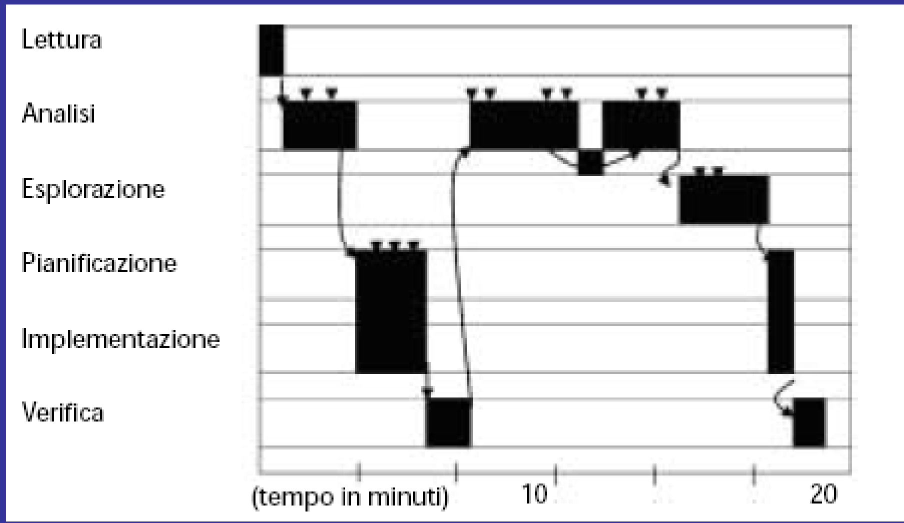
Il ‘bravo’ solutore

- Ha le conoscenze necessarie
- Ha un repertorio di euristiche (Polya)
- Ha abilità metacognitive

Gli *episodi* (Schoenfeld,1983):

1. Lettura
2. Analisi
3. Esplorazione
4. Pianificazione
5. Implementazione
6. Verifica
7. Transizione





Il ‘bravo’ solutore

- Ha le conoscenze necessarie
- Ha un repertorio di euristiche (Polya)
- Ha abilità metacognitive
- Ha convinzioni ‘vincenti’
- Ha un alto senso di auto-efficacia
- Ha motivazioni

Perché fare problem solving

- Sviluppa:

✓ la capacità di prendere decisioni

✓ l'assunzione della responsabilità dei propri processi di pensiero…

✓ …dell'apprendimento

- Favorisce la costruzione del senso di auto-efficacia
- Favorisce una visione delle discipline come discipline vive, di processi più che di prodotti

- Si fa problem solving a scuola?

- In particolare:

Si fa problem solving attraverso l'attività usuale di soluzione di problemi?

No!

Responsabilità della scarsa attenzione al problem solving:

- ✓ scarsi processi di controllo
- ✓ scarsa consapevolezza dei processi decisionali
- ✓ scarsa assunzione della responsabilità dei propri processi di pensiero…
- ✓ …dell’apprendimento
- costruzione di un basso senso di auto-efficacia
- visione della matematica come disciplina di prodotti più che di processi

Responsabilità dell’attività tradizionale di soluzione di problemi

Responsabilità della scarsa attenzione al problem solving:

- ✓ scarsi processi di controllo
- ✓ scarsa consapevolezza dei processi decisionali
- ✓ scarsa assunzione della responsabilità dei propri processi di pensiero…
- ✓ …dell'apprendimento
- costruzione di un basso senso di auto-efficacia
- visione delle discipline come discipline di prodotti più che di processi

Responsabilità della scarsa attenzione al problem solving:

- ✓ scarsi processi di controllo
- ✓ scarsa consapevolezza dei processi decisionali
- ✓ scarsa assunzione della responsabilità dei propri processi di pensiero…
- ✓ …dell'apprendimento
- costruzione di un basso senso di auto-efficacia
- visione delle discipline come discipline di prodotti più che di processi

Un test sulle decisioni

1
Ti capita a volte di prendere decisioni, cioè di decidere qualcosa?
Fai un esempio.

2
Ti piace prendere decisioni?
Perché?

3
A scuola ti capita di prendere decisioni?
Fai un esempio.

4

A casa, quando devi fare i compiti, ti capita di prendere decisioni?
Fai un esempio.

5

Qual è la materia in cui ti capita più spesso di prendere decisioni?
Perché?

6

Quando devi risolvere un problema di matematica
ti capita di prendere decisioni?
Fai un esempio.

Qual è la materia in cui ti capita più spesso di prendere decisioni? Perché?

- *‘A Inglese quando prendo i brutti voti se dirlo prima o dopo a mia madre.’* [Jonatha, 3a media]
- *‘Sono le materie orali come la storia e la geografia perché devo decidere se devo alzare la mano o no, oppure se andare volontaria o no.’* [Simona, 3a media]

Responsabilità della scarsa attenzione al problem solving:

- ✓ scarsi processi di controllo
- ✓ scarsa consapevolezza dei processi decisionali
- ✓ scarsa assunzione della responsabilità dei propri processi di pensiero…
- ✓ …dell’apprendimento
- costruzione di un basso senso di auto-efficacia
- visione delle discipline come discipline di prodotti più che di processi

Responsabilità della scarsa attenzione al problem solving:

- ✓ scarsi processi di controllo
- ✓ scarsa consapevolezza dei processi decisionali
- ✓ scarsa assunzione della responsabilità dei propri processi di pensiero…
- ✓ …dell’apprendimento
- costruzione di un basso senso di auto-efficacia
- visione della matematica come disciplina di prodotti più che di processi

Alessandro

Trovare l’area di un rettangolo, sapendo che il perimetro è 126 cm, e l’altezza è 3/4 della base.

…e non conclude

Qui di seguito ci sono 4 problemi, che tu devi cercare di risolvere.

IMPORTANTE!!!

Cerca di scrivere tutti i tuoi pensieri, tutti i ragionamenti che fai, le impressioni e le emozioni che provi, le difficoltà che incontri.

E' quello che pensi e che provi che ci interessa, non il risultato!

‘a questo punto non so,
cioè *non mi ricordo bene le formule…’*

Responsabilità della scarsa attenzione al problem solving:

- ✓ scarsi processi di controllo
- ✓ scarsa consapevolezza dei processi decisionali
- ✓ scarsa assunzione della responsabilità dei propri processi di pensiero…
- ✓ …dell’apprendimento
- costruzione di un basso senso di auto-efficacia
- visione della matematica come disciplina di prodotti più che di processi

Responsabilità dell’attività tradizionale di soluzione di problemi

Responsabilità dell’attività tradizionale di soluzione di problemi

Il problem solving in classe

Ripensiamo l’attività di soluzione di problemi

Responsabilità dell’attività tradizionale di soluzione di problemi

Il problem solving in classe

Ripensiamo l’attività di soluzione di problemi

Che tipo di problema?

Come usarlo?

Perché?

Scelte didattiche

...l'insegnante!

Che tipo di problema?

Scelte didattiche

...l'insegnante!

➢ *Struttura matematica*

- ✓ Il contenuto (area / equazioni / frazioni…)
- ✓ Quantità di processi risolutivi possibili (uno / più d’uno)
- ✓ Varietà di strategie risolutive (approccio grafico, manipolativo, …; per prove ed errori, per casi particolari, soluzione generale,…)
- ✓ La complessità (problemi ad una o più operazioni)
- ✓ La possibilità di dare risposte parziali
- ✓ …

CHE TIPO DI PROBLEMA?

Si devono utilizzare conoscenze apprese di recente	Non si sa a priori quali conoscenze utilizzare
E' previsto un unico approccio	Sono possibili più approcci
E' previsto un unico processo risolutivo	Sono possibili più processi risolutivi
E' del tipo "tutto o niente"	Sono possibili risposte parziali

Come usarlo?

Scelte didattiche

…l'insegnante!

➢ *Modalità d’uso*

- Individuale / a coppie / a gruppi
- Con/senza richiesta di verbalizzazione
- A casa / in classe
- Poco tempo / molto tempo
- Confronto finale: sì / no
- …

MODALITA' D'USO

Da soli	A gruppi
Poco tempo	Il tempo necessario
A casa (in classe solo la verifica)	In classe
L'insegnante corregge, risponde	L'insegnante fa domande


Che tipo di problema?
Come usarlo?
Perché?
Scelte didattiche
...l'insegnante!

$\boxed{\text{Perché?}}$

Scelte didattiche

...l'insegnante!

➢ *Obiettivi*

✓Verificare conoscenze e abilità

✓Consolidare conoscenze e abilità

✓Introdurre nuove conoscenze

✓Promuovere abilità di problem solving

✓Promuovere un atteggiamento positivo verso la matematica

OBIETTIVI

Valutare conoscenze e abilità

Consolidare conoscenze e abilità

Introdurre conoscenze

OBIETTIVI

Sviluppare abilità
e conoscenze
In matematica

Consolidare
conoscenze e
abilità

Promuovere abilità
di problem solving
(in matematica)

Introdurre
conoscenze

Promuovere
un atteggiamento
positivo verso
la matematica

Il problem solving in classe

- Il ruolo degli errori

Popper

‘Evitare errori è un ideale meschino: se non osiamo affrontare problemi che siano così difficili da rendere l’errore quasi inevitabile, non vi sarà allora sviluppo della conoscenza. In effetti, è dalle nostre teorie più ardite, *incluse quelle che sono erronee*, che noi impariamo di più. Nessuno può evitare di fare errori; la cosa più grande è imparare da essi.‘

Il problem solving in classe

- Il ruolo degli errori

- L'idea di successo: dalla risposta corretta a processi di pensiero significativi

Il problem solving in classe

- Il ruolo degli errori

- L’idea di successo: dalla risposta corretta a processi di pensiero significativi

- Il ruolo dell’insegnante

L’insegnante:

- *Non* corregge eventuali errori
- *Non* suggerisce la risposta corretta

Ma…

- Fa domande per stimolare processi di pensiero:
  - ✓ Cosa avete fatto?
  - ✓ Cosa state facendo?
  - ✓ Cosa pensate di fare?
- Utilizza le potenzialità della ‘comunità di pratica’ per:

✓ sottolineare la varietà dei processi possibili

✓ sviluppare abilità di argomentazione

✓ negoziare significati

Il problem solving in classe

- Il ruolo degli errori
- L'idea di successo: dalla risposta corretta a processi di pensiero significativi
- Il ruolo dell'insegnante
- Importanza di avere un repertorio di problemi

Ma c'è ancora un altro aspetto…

Che tipo di problema?

Scelte didattiche

...l’insegnante!

La *formulazione* del testo

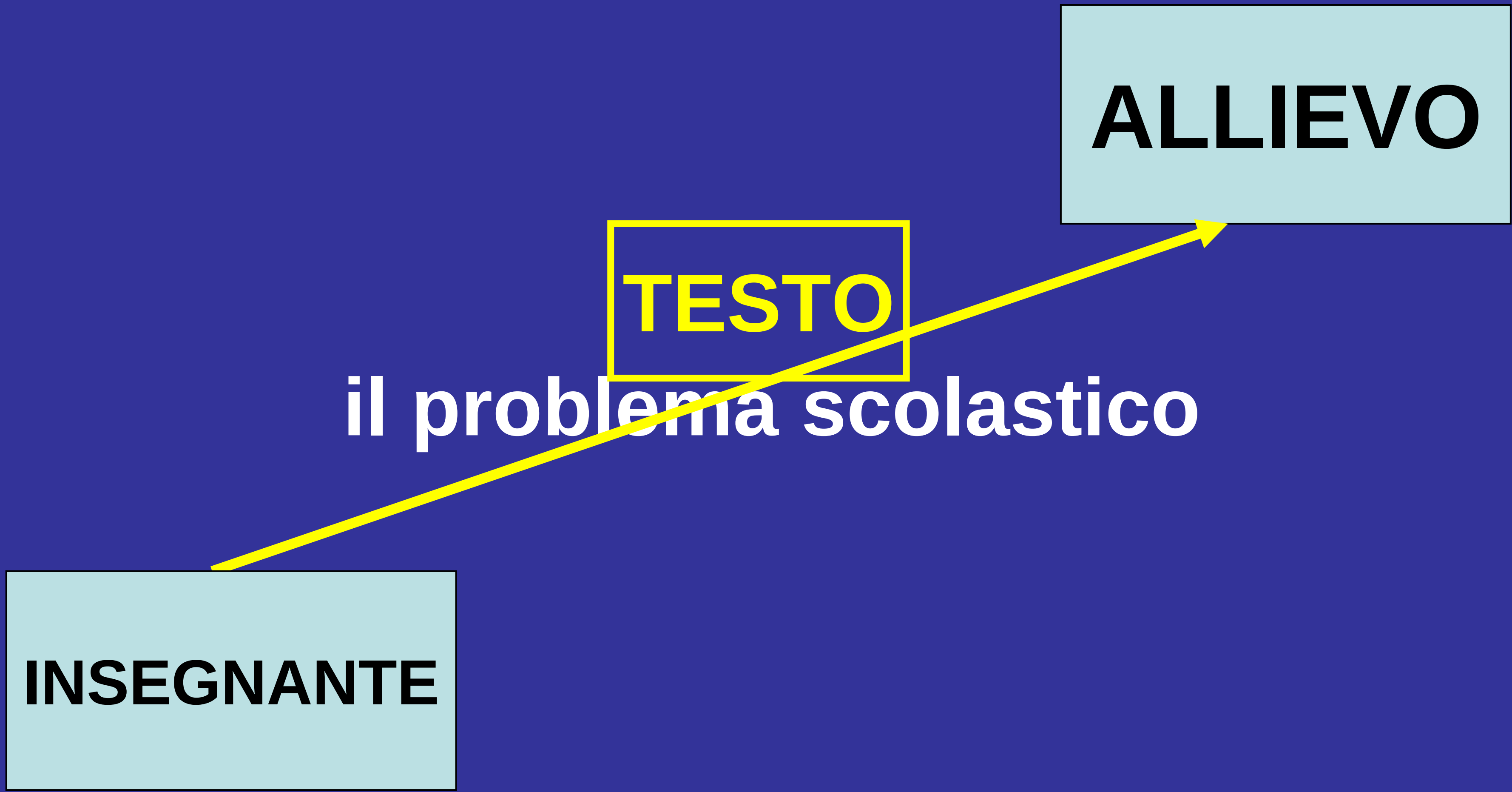
La *comprensione* del problema

Secondo molti ricercatori (e insegnanti) le difficoltà degli allievi sono spesso dovute a difficoltà nella fase iniziale di comprensione.

⇩

Importanza di individuare le variabili legate al processo di comprensione

il problema scolastico



problema espresso attraverso un testo (scritto)

PROBLEMI VERBALI

- La struttura matematica è contestualizzata in una situazione ‘concreta’, ‘famigliare’:
  il *contesto*
- C’è una *richiesta* (in genere una domanda)

intende favorire

- la **motivazione**
- la **comprensione** della richiesta e delle informazioni, richiamando le esperienze e conoscenze dell’allievo

PROBLEMI VERBALI

- La struttura matematica è contestualizzata in una situazione ‘concreta’, ‘famigliare’:

struttura narrativa

- (in genere una domanda)

Che tipo di problema?

Come usarlo?

Perché?

Scelte didattiche

...l'insegnante!

Che tipo di problema?

STRUTTURA MATEMATICA

STRUTTURA NARRATIVA

Scelte didattiche

…l'insegnante!

LA STRUTTURA NARRATIVA

CONTESTO

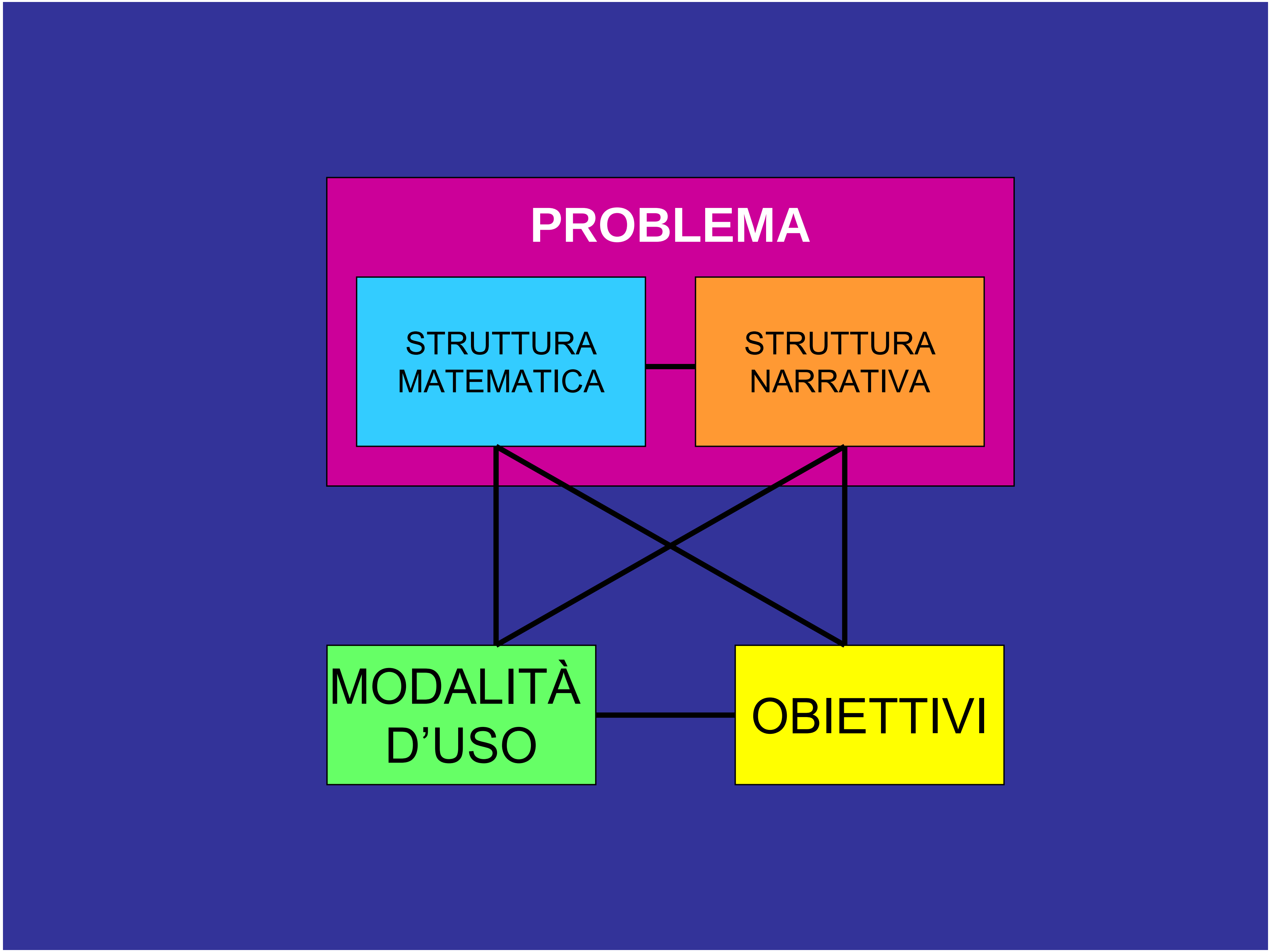
DOMANDA

➢ La struttura narrativa

- Tipo di contesto: concreto / astratto; famigliare / non famigliare; …
- Lunghezza del testo
- Dizionario
- Conoscenza enciclopedica
- Formulazione della richiesta
- …

- **Il legame fra contesto e domanda**

Riassumendo…


PROBLEMA
STRUTTURA MATEMATICA
STRUTTURA NARRATIVA
MODALITÀ D'USO
OBIETTIVI

Il problem solving è un approccio

↓

- si può utilizzare in qualsiasi momento della pratica scolastica

Il problem solving è un approccio

- Ad esempio:

- Proporre domande e problemi PRIMA di introdurre o ripassare un concetto

(vedi progetto precorsi e progetto P.O.R.T.A.)

Il problem solving è un approccio

In particolare l’attività di risoluzione di problemi di matematica:

- Richiede una grande attenzione al linguaggio quotidiano
- È il contesto ideale in cui *pensiero logico* e *pensiero narrativo* collaborano per l’elaborazione di processi risolutivi

IL PROBLEM SOLVING

attività di soluzione di problemi

Anche l'insegnamento è problem solving

L'insegnante deve continuamente:

- Riconoscere problemi
- Prendere decisioni:
  - ✓ prima
  - ✓ durante
  - ✓ dopo

…l'interazione con gli allievi

Anche l’insegnamento è problem solving

Anche nell’insegnamento l’errore va messo nel conto…

Bruno Bettelheim, *Un genitore quasi perfetto*

[...] per una buona educazione dei propri figli, non bisogna cercare di essere dei genitori perfetti, né tanto meno aspettarsi che lo siano, o che lo diventino, i nostri figli. La perfezione non è alla portata del normale essere umano, e l'accanimento nel volerla raggiungere è inevitabilmente di ostacolo a quell'atteggiamento di tolleranza verso le imperfezioni altrui, comprese quelle dei figli, che, solo, rende possibili rapporti umani decenti.

E' invece alla portata di tutti essere genitori passabili, vale a dire genitori che educano bene i figli. Occorre però che gli errori che commettiamo nell'educarli (errori il più delle volte dovuti semplicemente all'intensità del nostro coinvolgimento emotivo) siano più che compensati dalle molte occasioni in cui ci comportiamo in modo giusto con loro.

In questo incontro

- **Breve riassunto delle puntate precedenti…**
- **Il problem solving**
- **Implicazioni per il recupero:**
  - ✓ **Osservazioni generali**
  - ✓ **Materiali ed esperienze:**
    - → Atteggiamenti negativi
    - → Abilità linguistiche e trasversali
    - → Abilità metacognitive
    - → Come si studia la matematica:
      - Definizioni
      - Dimostrazioni

OSSERVA COMPORTAMENTI

DIFFICOLTA'

VALUTA

INTERVENTO DI RECUPERO

INTERVIENE

Fissa gli
OBIETTIVI

Li esplicita
In termini di
COMPORTAMENTI

OSSERVA
COMPORTAMENTI

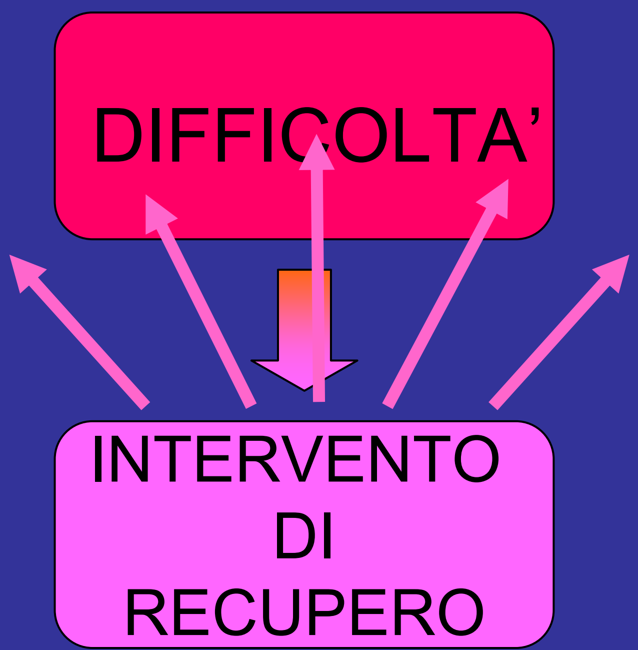
VALUTA

INTERPRETA
I COMPORTAMENTI

INTERVIENE

DIFFICOLTA'

INTERVENTO
DI
RECUPERO



INTERPRETAZIONI DIVERSE

INTERPRETA
I COMPORTAMENTI

IN MODO DIFFERENZIATO!!!

INTERVIENE

Lacune di base

Atteggiamento negativo

Studio inadeguato

Difficoltà di comprensione

Studio insufficiente

CARENZE METACOGNITIVE

CARENZE LINGUISTICHE

INTERPRETA
I COMPORTAMENTI

INTERVIENE

INTERVENTO DI RECUPERO

Lacune di base

Atteggiamento negativo

Studio inadeguato

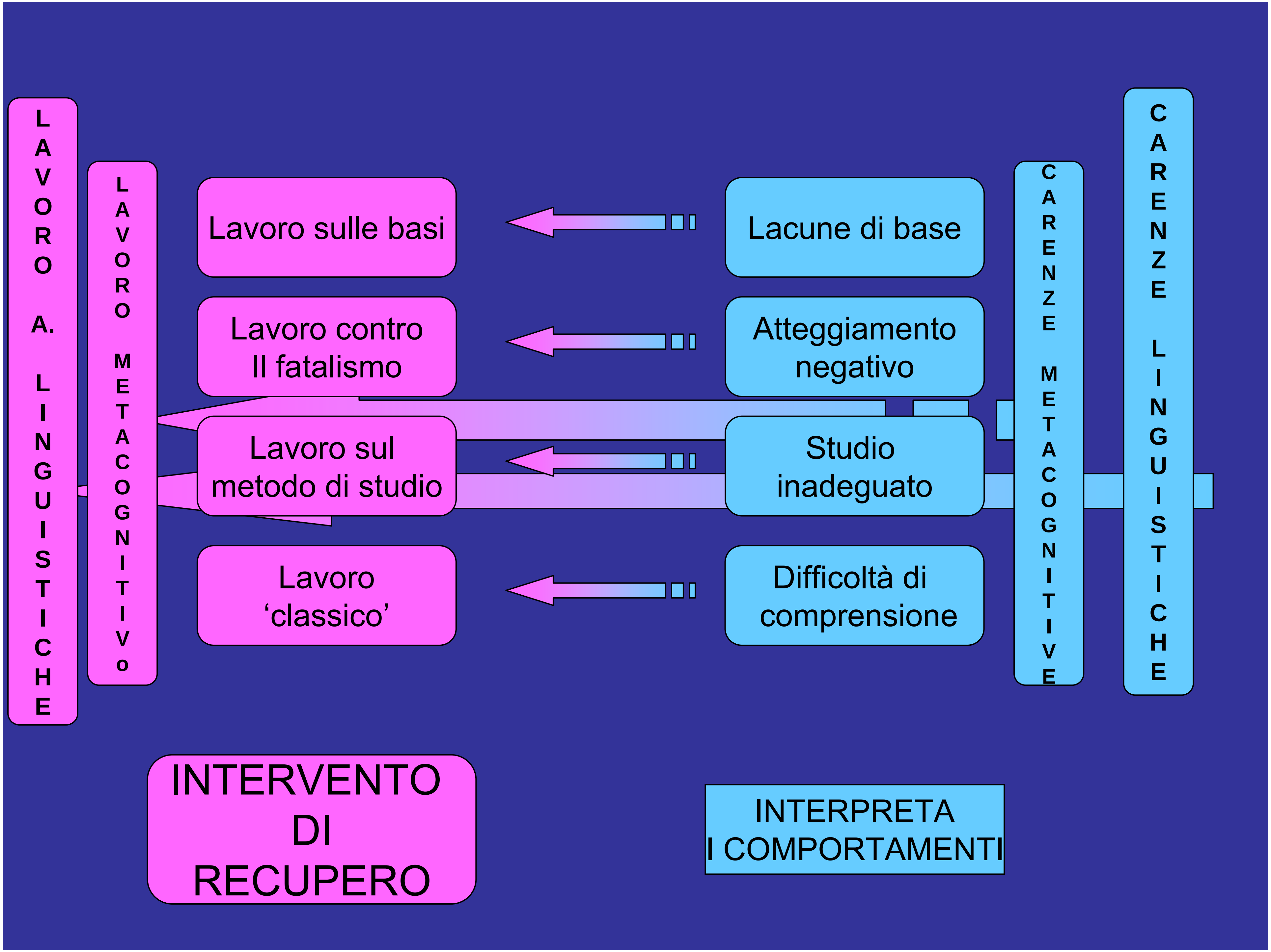
Difficoltà di comprensione

CARENZE METACOGNITIVE

CARENZE LINGUISTICHE

INTERVENTO DI RECUPERO

INTERPRETA I COMPORTAMENTI


LAVORO A. LINGUISTICHE
LAVORO METACOGNITIVO
Lavoro sulle basi
Lavoro contro Il fatalismo
Lavoro sul metodo di studio
Lavoro ‘classico’
Lacune di base
Atteggiamento negativo
Studio inadeguato
Difficoltà di comprensione
CARENZE METACOGNITIVE
CARENZE LINGUISTICHE
INTERVENTO DI RECUPERO
INTERPRETA I COMPORTAMENTI

Lavoro ***trasversale*** su:

- LINGUAGGIO
- ATTENZIONE
- CONSAPEVOLEZZA DELLE PROPRIE RISORSE
- PROCESSI DI CONTROLLO
- CONSAPEVOLEZZA DEI PROCESSI DECISIONALI

LAVORO A. LINGUISTICHE

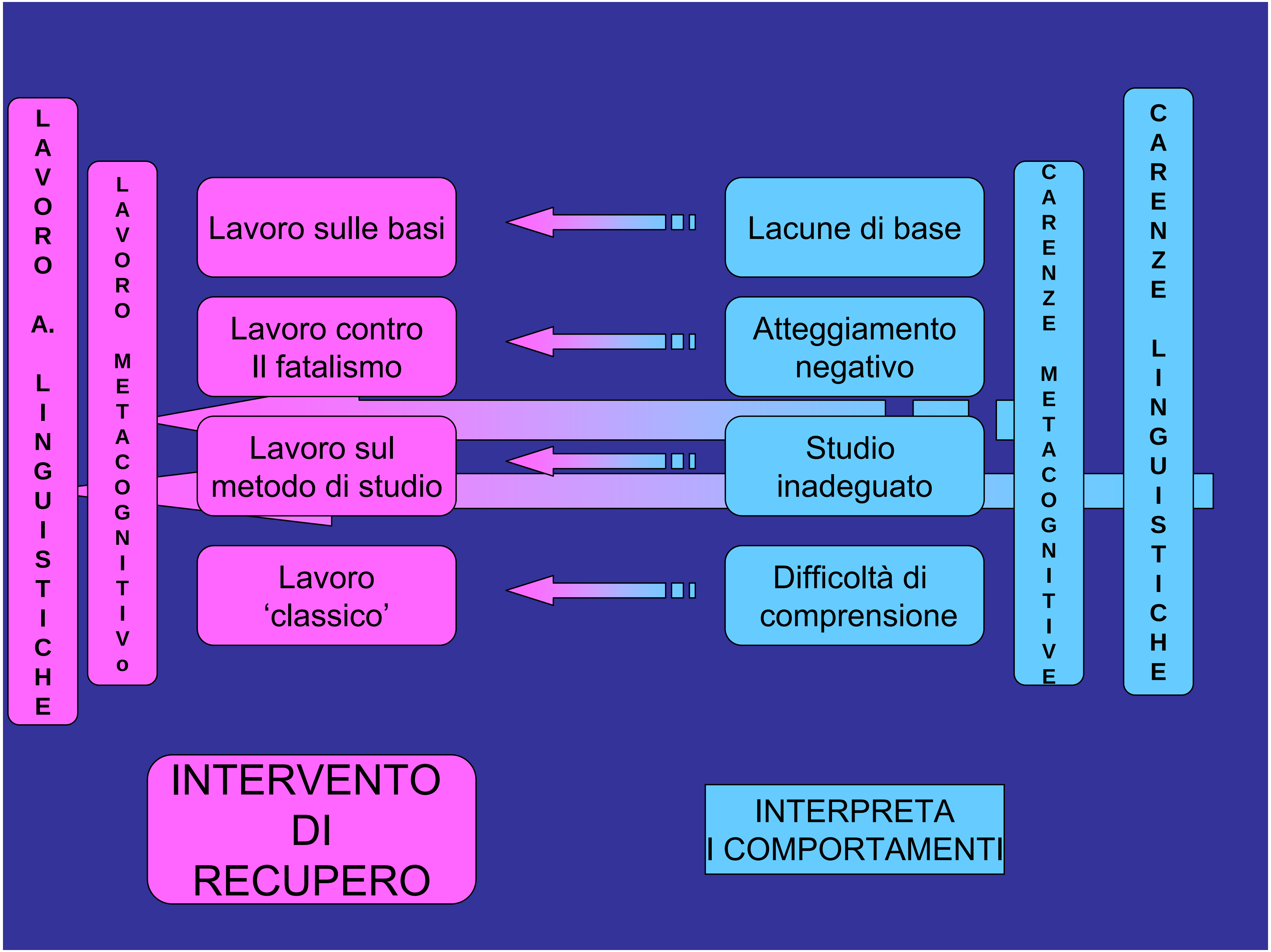
LAVORO METACOGNITIVO

CARENZE METACOGNITIVE

CARENZE LINGUISTICHE

INTERVENTO DI RECUPERO

INTERPRETA I COMPORTAMENTI


LAVORO A. LINGUISTICHE
LAVORO METACOGNITIVO
Lavoro sulle basi
Lavoro contro Il fatalismo
Lavoro sul metodo di studio
Lavoro ‘classico’
Lacune di base
Atteggiamento negativo
Studio inadeguato
Difficoltà di comprensione
CARENZE METACOGNITIVE
CARENZE LINGUISTICHE
INTERVENTO DI RECUPERO
INTERPRETA I COMPORTAMENTI

Lavoro sulle basi ← Lacune di base

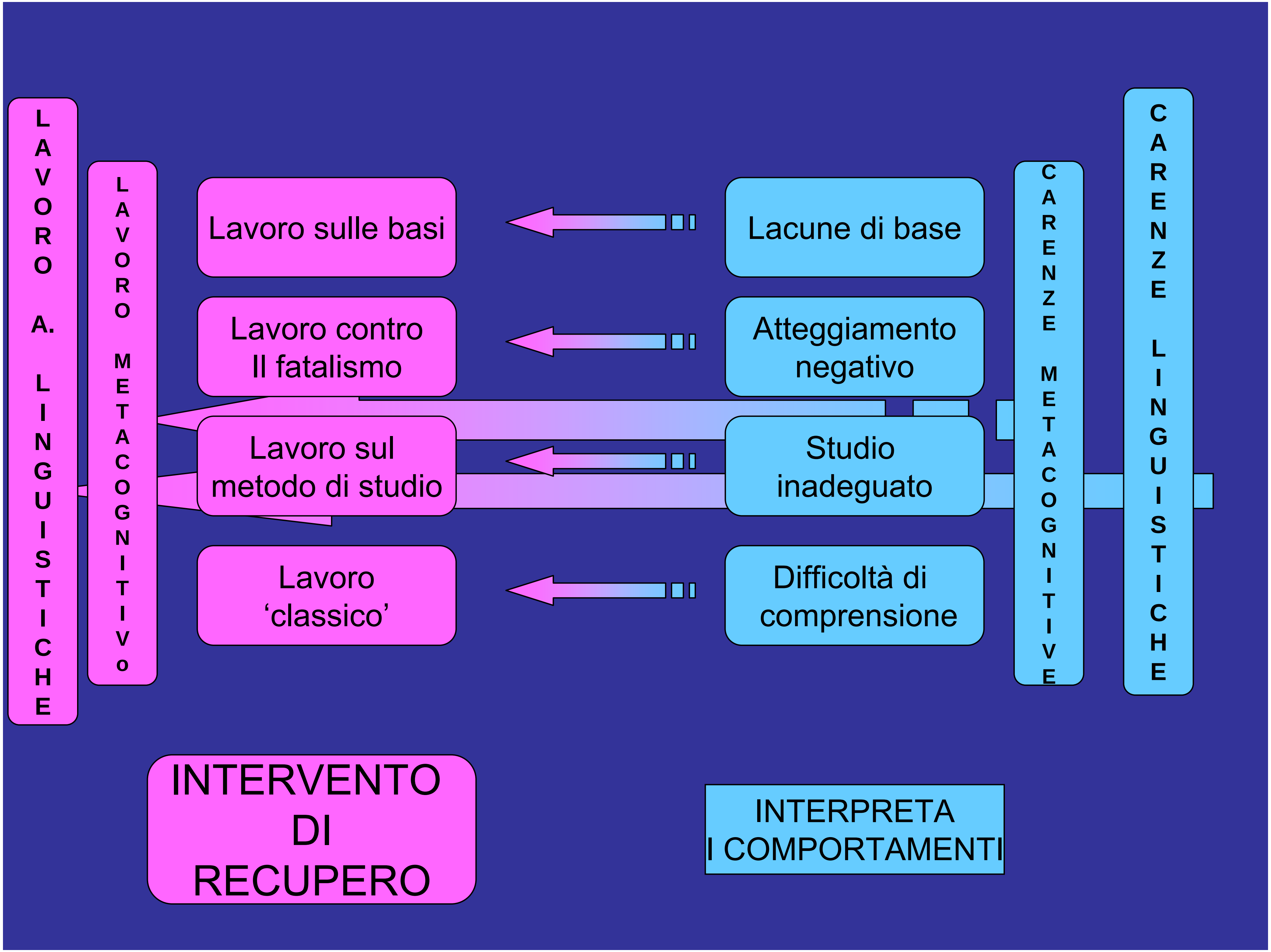
Con attenzione a:

- MISCONCETTi
- CONVINZIONI
- metodologia: lavoro collaborativo…

Lavoro 'classico' ← Difficoltà di comprensione

INTERVENTO DI RECUPERO

INTERPRETA I COMPORTAMENTI



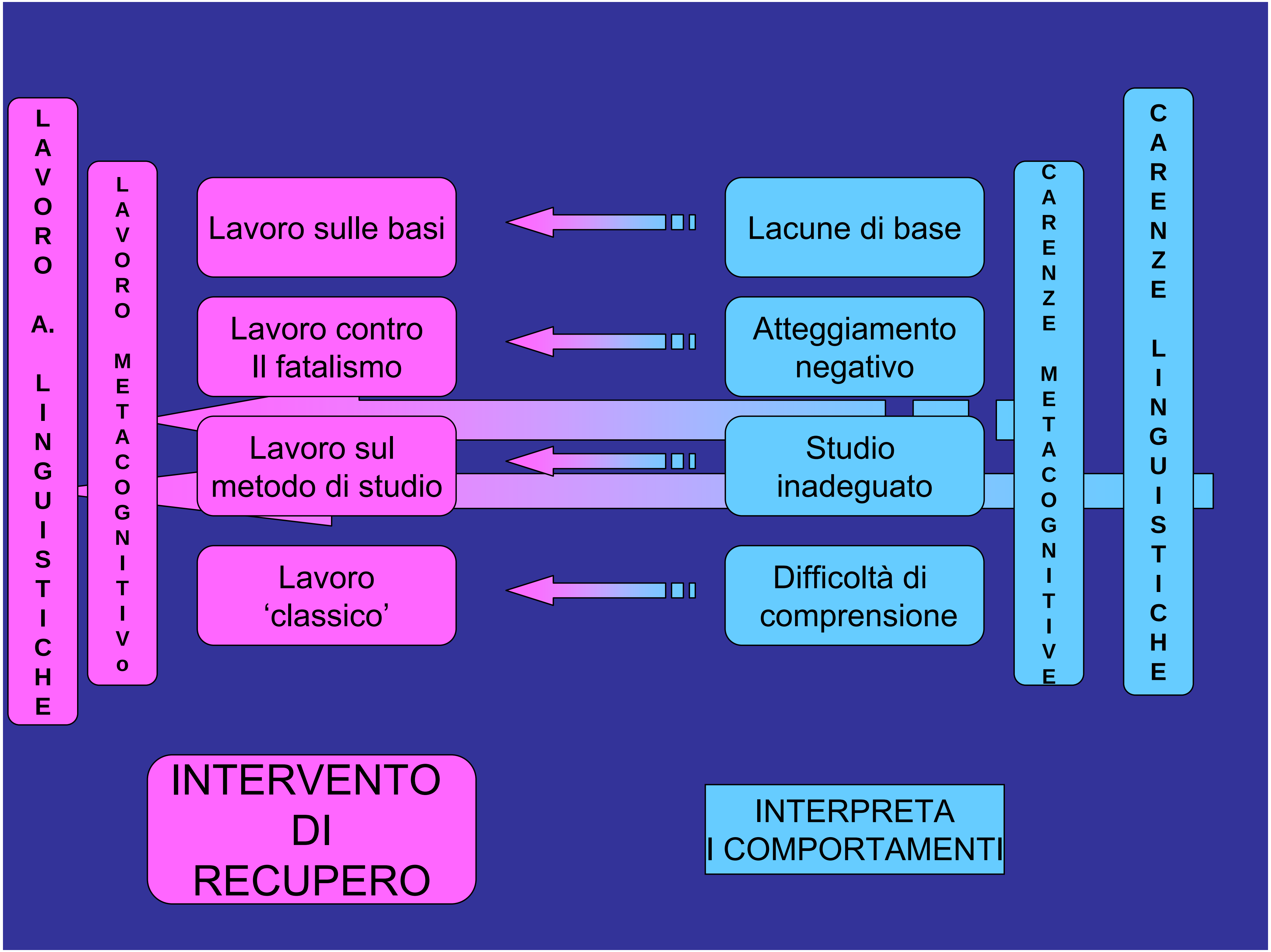
LAVORO A. LINGUISTICHE
LAVORO METACOGNITIVO
Lavoro sulle basi
Lavoro contro Il fatalismo
Lavoro sul metodo di studio
Lavoro 'classico'
Lacune di base
Atteggiamento negativo
Studio inadeguato
Difficoltà di comprensione
CARENZE METACOGNITIVE
CARENZE LINGUISTICHE
INTERVENTO DI RECUPERO
INTERPRETA I COMPORTAMENTI

Lavoro sul metodo di studio

Studio inadeguato

INTERVENTO DI RECUPERO

INTERPRETA I COMPORTAMENTI


LAVORO A. LINGUISTICHE
LAVORO METACOGNITIVO
Lavoro sulle basi
Lavoro contro Il fatalismo
Lavoro sul metodo di studio
Lavoro 'classico'
Lacune di base
Atteggiamento negativo
Studio inadeguato
Difficoltà di comprensione
CARENZE METACOGNITIVE
CARENZE LINGUISTICHE
INTERVENTO DI RECUPERO
INTERPRETA I COMPORTAMENTI

Lavoro contro
Il fatalismo

Atteggiamento
negativo

INTERVENTO
DI
RECUPERO

INTERPRETA
I COMPORTAMENTI

In questo incontro

- **Breve riassunto delle puntate precedenti…**
- **Il problem solving**
- **Implicazioni per il recupero:**
  - ✓ **Osservazioni generali**
  - ✓ **Materiali ed esperienze:**
  - → Atteggiamenti negativi
  - → Abilità linguistiche e trasversali
  - → Abilità metacognitive
  - → Come si studia la matematica:
    - Definizioni
    - Dimostrazioni

Lavoro contro
Il fatalismo

Atteggiamento
negativo

INTERVENTO
DI
RECUPERO

INTERPRETA
I COMPORTAMENTI

Recupero (e prevenzione) di atteggiamenti negativi

IL PROBLEM SOLVING

Io non sono in grado
di controllare

La matematica
è ***di per sé*** incontrollabile

La matematica
è incontrollabile

FATALISMO

Rinuncia
a pensare

NON
RISPONDE

RISPONDE
A CASO


Scarso senso di auto-efficacia
Visione 'distorta' della matematica
La matematica è incontrollabile
FATALISMO
Rinuncia a pensare
NON RISPONDE
RISPONDE A CASO

Convinzione di
non poter riuscire in matematica
o viceversa convinzione di *non poter avere difficoltà*.

Visione della matematica come insieme di regole e formule da applicare a seconda dei vari casi e quindi approccio meccanico che richiede uno sforzo mnemonico immane.

aspetti affettivi

aspetti cognitivi

Atteggiamento negativo nei confronti della disciplina

Le tre dimensioni sono strettamente correlate e dunque interventi focalizzati su un'unica dimensione presentano rischi elevati di inefficacia (o scarsa efficacia).

Intervenire contemporaneamente sulle tre dimensioni attraverso:

- attività strutturate
- una metodologia particolare

Atteggiamento negativo nei confronti della disciplina

- Partire da problemi.
- Prestare attenzione ai processi.
- Non ignorare (NON CENSURARE) processi o prodotti scorretti.
- Sintetizzare elementi chiave alla fine.
- Favorire sia il lavoro individuale che quello collettivo.
- Favorire la discussione tra gli studenti.

LINGUAGGIO E COMUNICAZIONE

PROBLEM SOLVING

- Partire da problemi.
- Prestare attenzione ai processi.
- Non ignorare (NON CENSURARE) processi o prodotti scorretti.
- Sintetizzare elementi chiave alla fine.
- Favorire sia il lavoro individuale che quello collettivo.
- Favorire la discussione tra gli studenti.

Contro il fatalismo…

…il problem solving:

- Per ricostruire il senso di auto-efficacia
- Per scardinare una visione della matematica distorta (formule da ricordare, esercizi tutti uguali, …)

Scarso senso di auto-efficacia

La matematica è incontrollabile

FATALISMO

Rinuncia a pensare

NON RISPONDE

RISPONDE A CASO

IL PROBLEM SOLVING

IMPEGNO MIRATO

↓

SUCCESSO

↓

SENSO DI AUTO-EFFICACIA

↓

ASSUNZIONE DELLA RESPONSABILITA' DELL'APPRENDIMENTO

Scarso senso di auto-efficacia

Struttura matematica

Quali problemi?

Formulazione

Quale metodologia?

Scarso senso di auto-efficacia

Struttura matematica

Quali problemi?

Problemi:

- **che non richiedano prerequisiti scolastici**
- **che permettano l'*esplorazione***

Scarso senso di auto-efficacia

Quali problemi?

Richieste che valorizzino anche le risposte parziali

Formulazione

➢ La formulazione della richiesta

La domanda ha un ruolo cruciale per far sì che la percezione di successo sia associata al lavoro fatto, e non necessariamente alla risoluzione ‘completa’

Esempio

Avendo:

- 3 pantaloni di colore diverso (nero, marrone, blu)
- 4 maglie di colore diverso (giallo, verde, arancione, bianco)
- 2 paia di scarpe diverse (con le stringhe / senza stringhe)

quanti sono i modi diversi di combinare pantaloni, maglie, scarpe?

…per dare la risposta corretta devi trovarli TUTTI!

- Trova alcuni modi diversi di combinare pantaloni, maglie, scarpe
- Riesci a trovarli tutti?
- Come fai ad essere sicuro di averli trovati proprio tutti?

Scarso senso di auto-efficacia

Una metodologia che ‘forzi’ ad assumersi le responsabilità
Ad esempio: lavoro a coppie
E comunque: a gruppi omogenei

Quale metodologia?


Scarso senso di auto-efficacia
Visione ‘distorta’ della matematica
La matematica è incontrollabile
FATALISMO
Rinuncia a pensare
NON RISPONDE
RISPONDE A CASO

Visione 'distorta' della matematica

La matematica è incontrollabile

FATALISMO

Rinuncia a pensare

NON RISPONDE

RISPONDE A CASO

Contro il fatalismo…

…il problem solving:

- Per ricostruire il senso di auto-efficacia
- Per scardinare una visione della matematica distorta (formule da ricordare, esercizi tutti uguali, …)

Visione 'distorta' della matematica

Quali problemi?

Quale metodologia?

Visione ‘distorta’ della matematica

Struttura matematica

Quali problemi?

Problemi:

- **aperti**
- **che richiedano di formulare congetture**
- **che permettano più processi risolutivi**

➢ La formulazione della domanda

La domanda ha un ruolo cruciale perfar sì che la percezione di successo sia associata al lavoro fatto, e non necessariamente alla risoluzione ‘completa’ :

- per spostare l’attenzione dai prodotti ai processi

Una strategia…

- Fare in modo che non sia possibile una “ risposta corretta” che prescinda dai processi di pensiero.

  Esempi:

- *Non* chiedere “Trova…”, ma chiedere solo: “Come faresti a trovare…?”
- Eliminare i dati numerici, chiedendo:

  “Quali dati ti servirebbero?”

Visione 'distorta' della matematica

- **Formulare la richiesta: "Come faresti per…"**
- **Non mettere (solo) dati numerici**

Quali problemi?

Formulazione

Visione 'distorta' della matematica

- richiedere la verbalizzazione
- favorire il confronto, la discussione

Quale metodologia?

Scarso senso
di auto-efficacia
Visione 'distorta'
della matematica
FATALISMO
Rinuncia
a pensare
NON
RISPONDE
RISPONDE
A CASO

Scarso senso di auto-efficacia ⟷ **Visione 'distorta' della matematica**

Per un recupero mirato…

- Individuare una serie di problemi adatti per scardinare il basso senso di auto-efficacia: (eventualmente riformulando opportunamente la domanda)

- Individuare una serie di problemi adatti per scardinare una visione della matematica come disciplina fatta di regole da memorizzare e applicare

In questo incontro

- **Breve riassunto delle puntate precedenti…**
- **Il problem solving**
- **Implicazioni per il recupero:**
  - **Osservazioni generali**
  - **Materiali ed esperienze:**
  - → Atteggiamenti negativi
  - → Abilità linguistiche e trasversali
  - → Abilità metacognitive
  - → Come si studia la matematica:
    - Definizioni
    - Dimostrazioni

Materiali

Abilità linguistiche e trasversali

Abilità linguistiche e trasversali

RAPPRESENTARE

UNO DEI TEST INIZIALI (LA FASE 'DIAGNOSTICA')

Qui di seguito ci sono 4 problemi, che tu devi cercare di risolvere.
IMPORTANTE!!!
Cerca di scrivere tutti i tuoi pensieri, tutti i ragionamenti che fai, le impressioni
e le emozioni che provi, le difficoltà che incontri.
E' quello che pensi e che provi che ci interessa, non il risultato!

PROBLEMA 1: Andando a pesca il signor Max ha pescato un grosso pesce;
la sua coda pesa 4 kg, il suo tronco pesa quanto la sua testa e la sua coda insieme;
la sua testa pesa quanto metà tronco più la coda.
Quanto pesa tutto il pesce?

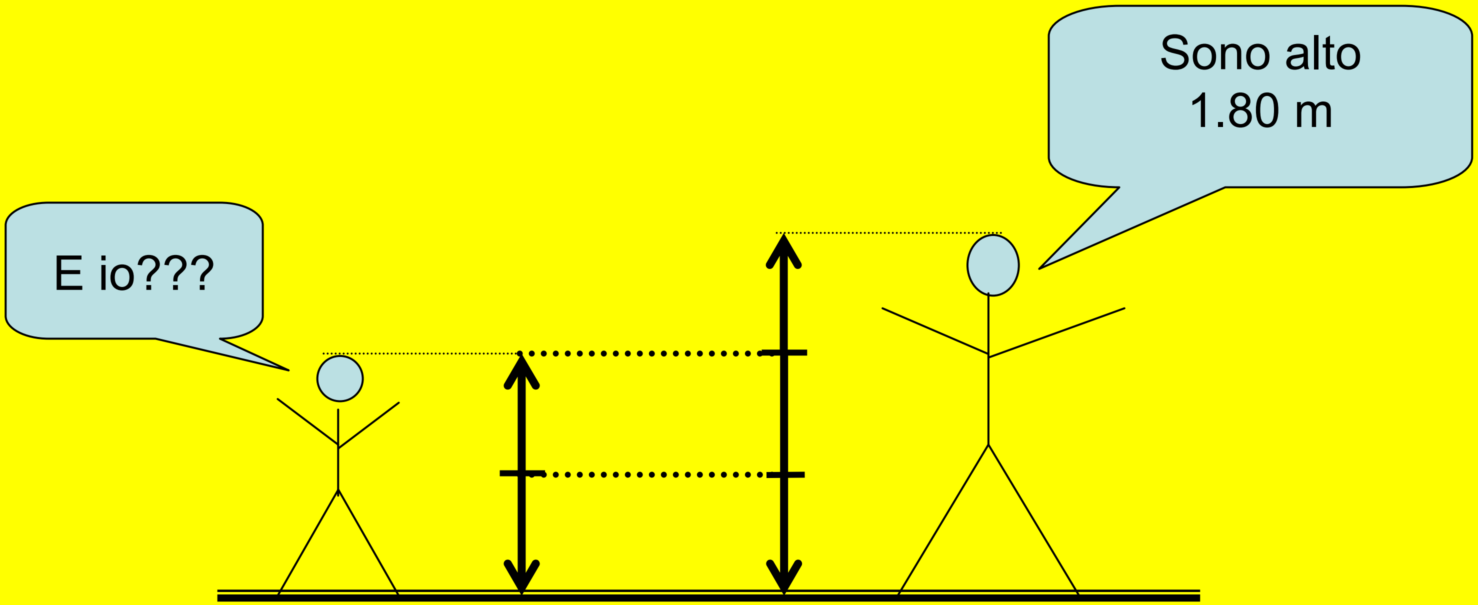
PROBLEMA 2: Un arabo compra un tappeto pagandolo 80 dollari,
e poi lo rivende a 90 dollari.
Dopo un po' di tempo ricompra lo stesso tappeto per 100 dollari, e
poi lo rivende ancora a 110 dollari.
Quanto ha guadagnato?

PROBLEMA 3: In un rettangolo il perimetro misura 112 cm,
e la base è 4/3 dell'altezza.
Calcola l'area del rettangolo.

PROBLEMA 4: Un'automobile percorre 6 km in 4 minuti.
In quanti minuti percorre 7 km?

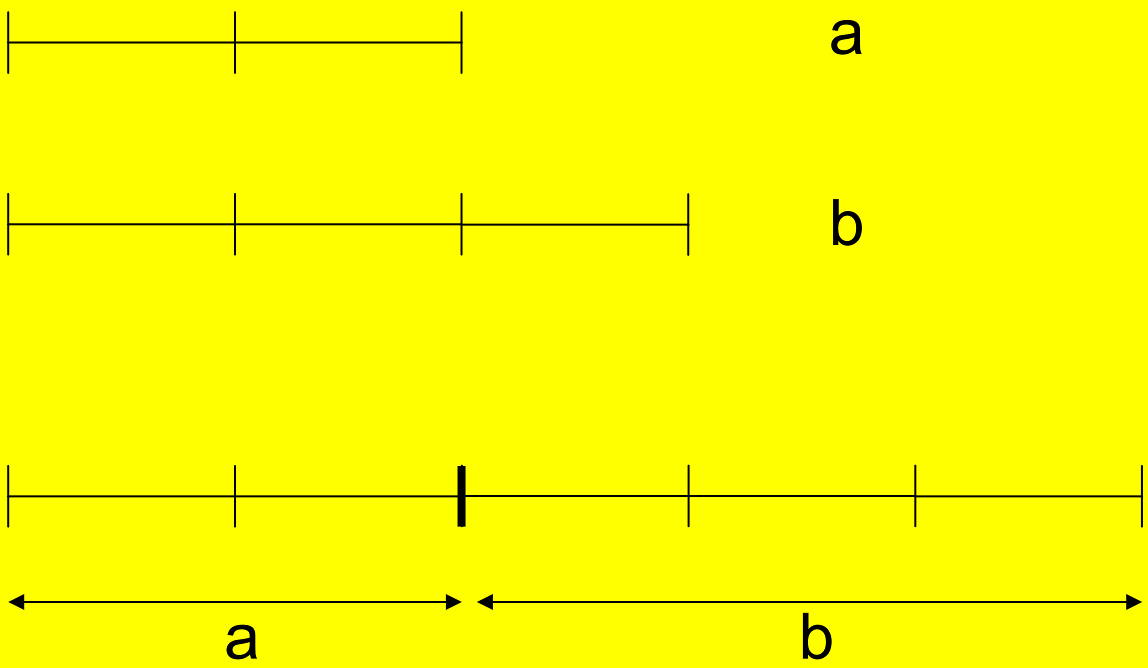
1° INCONTRO: SENZA PAROLE

Ovvero: quando il disegno parla…



1° INCONTRO: SENZA PAROLE

Ovvero: quando il disegno parla…



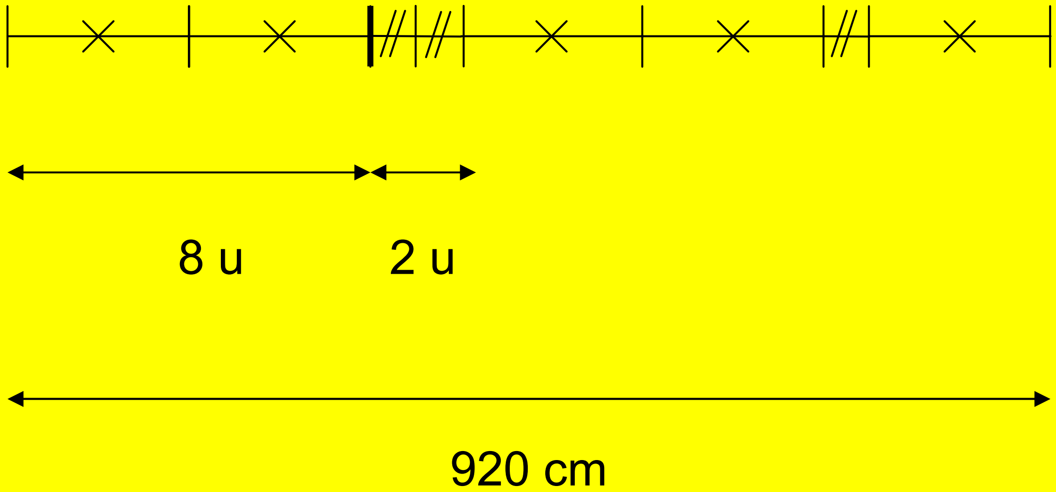
$a + b = 20$ cm

$a = ?$

$b = ?$

1° INCONTRO: SENZA PAROLE

Ovvero: quando il disegno parla…



u = ?

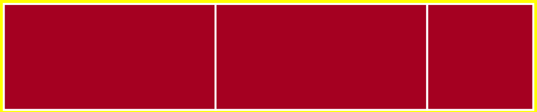
1° INCONTRO: SENZA PAROLE

Ovvero: quando il disegno parla…

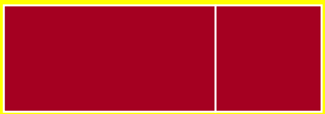
Quale fra i seguenti disegni corrisponde secondo te al problema:

“Un mattone pesa 1kg più mezzo mattone. Quanto pesa un mattone?”

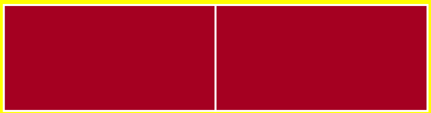
a]



b]



c]



d]

A proposito, quanto pesa il mattone?

2° INCONTRO, **ovvero:**

CON L'AIUTO DI UN DISEGNO SI POSSONO FARE TANTE COSE...
anche aver la meglio sulle frazioni!

1.

Una torre, alta in tutto 12 mattoncini Lego, è fatta per un pezzo di mattoncini verdi, per l'altro pezzo di mattoncini bianchi. Il piano verde è alto metà del piano bianco.

Quanto sono alti i due piani?

2.

In un'altra torre, alta invece 14 mattoncini, c'è un piano verde, un piano bianco, un piano rosso. Il piano verde è alto metà del piano bianco, e il piano rosso è alto il doppio del piano bianco.

Quanto sono alti i tre piani?

3.

Nell'ultima torre (finalmente!), che è alta 36 mattoncini, ci sono: un piano verde, uno bianco, uno rosso. Il piano verde è alto metà del piano bianco, che è alto 1/3 del piano rosso.

Quanto sono alti i tre piani?

3° INCONTRO
ovvero
SEMPRE PIU' DIFFICILE!

1.

Una torre di mattoncini Lego è fatta di 3 piani di colori diversi: verde, bianco, rosso.

Il 1° piano è alto 1 mattoncino Lego.

Il 2° piano è alto tanti mattoncini Lego quanto il 1° piano e il 3° insieme.

Il 3° piano è alto tanti mattoncini Lego quanto il 1° piano più metà del 2°.

Quanto sono alti i tre piani?

P.S.: vi ricorda niente questo problema?

4° INCONTRO
ovvero
E SE FOSSE GEOMETRIA?

1.

In un rettangolo la base è 4/3 dell'altezza, e il perimetro misura 280 cm.

Qual è l'area del rettangolo?

2.

Un rettangolo e un quadrato hanno lo stesso perimetro: 100 cm.

L'altezza del rettangolo è 3/5 del lato del quadrato.

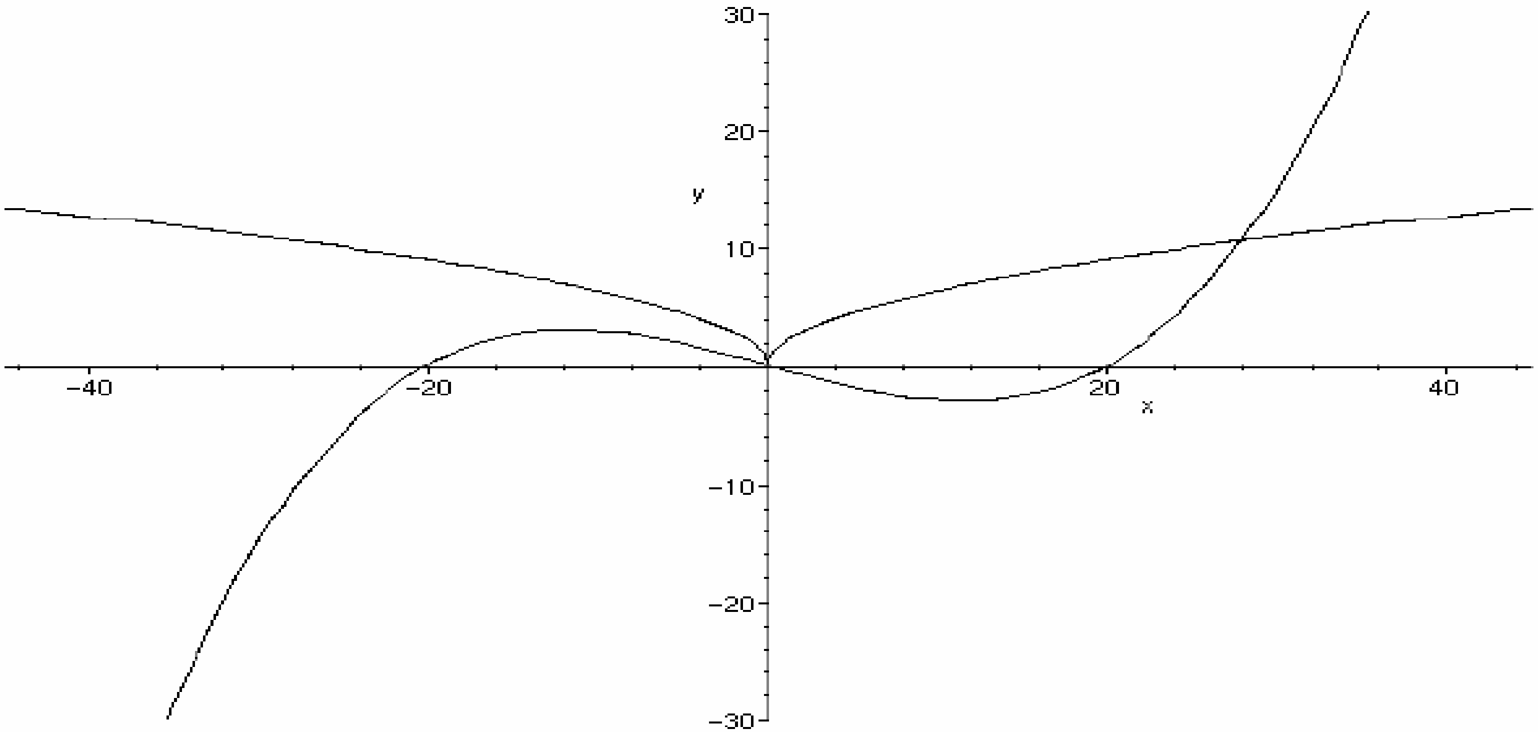
Qual è l'area del rettangolo?

Dal progetto P.O.R.T.A. e dai precorsi della Facoltà di Scienze

Cambio di rappresentazione

- La differenza tra la rappresentazione di un oggetto matematico e l'oggetto stesso.
- Diverse rappresentazioni di un oggetto matematico possono fornire informazioni diverse su uno stesso oggetto.
- Importanza di trattare uno stesso oggetto in diversi sistemi di rappresentazione.
- Importanza di una dialettica tra rappresentazione grafica e algebrico-analitica e il suo ruolo nello studio di equazioni e disequazioni, di funzioni, di curve.

In figura sono rappresentate le curve di equazioni $y = 2\sqrt{|x|}$ (curva $\mathcal{C}_1$) e $y = \frac{1}{1000}(x^3 - 400x)$ (curva $\mathcal{C}_2$).



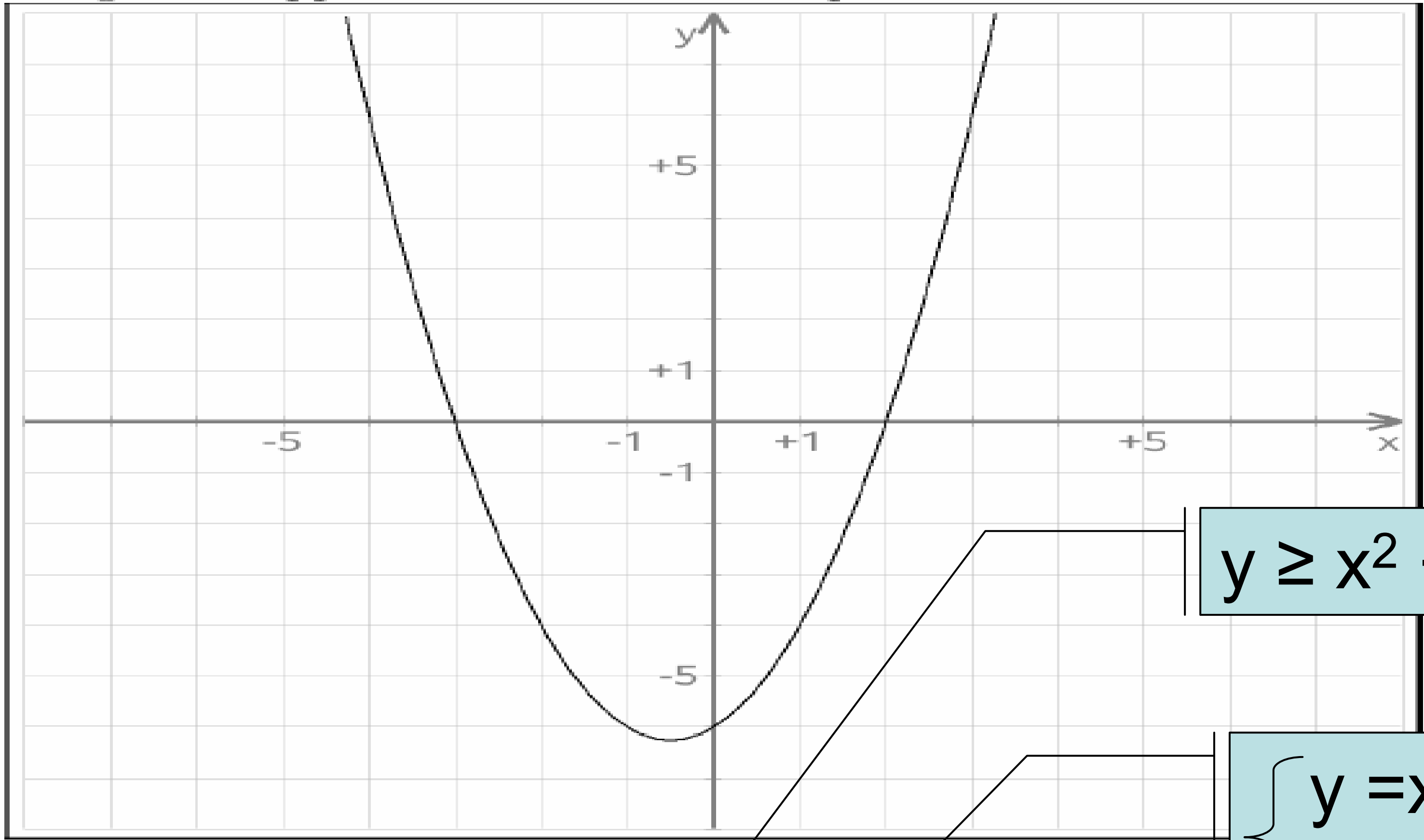
1. L'equazione $2\sqrt{|x|} = \frac{1}{1000}(x^3 - 400x)$ ha soluzione?

   In caso affermativo segna sul grafico (sull'asse x) tutte le soluzioni dell'equazione.

2. La disequazione $2\sqrt{|x|} \geq \frac{1}{1000}(x^3 - 400x)$ ha soluzione?

   In caso affermativo segna sul grafico (sull'asse x) tutte le soluzioni della disequazione.

In figura è rappresentata la curva di equazione $x^2 + x - 6$:



1. Qual è l'insieme di tutte le soluzioni della disequazi

2. Prova a rappresentare sul piano (magari usando colori diversi) l'insieme dei punti (x, y) tali che:

   (a) $y \geq x^2 + x - 6$

   (b) $\begin{cases} y = x^2 + x - 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$

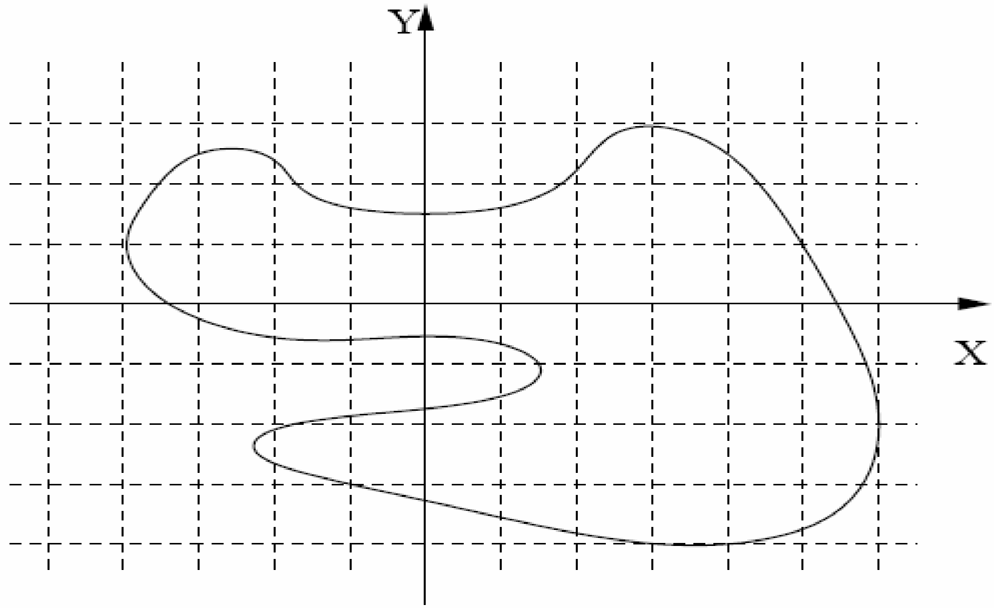
   (c) $x^2 + x - 6$

$y \geq x^2 + x - 6$

$\begin{cases} y = x^2 + x - 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$x^2 + x - 6 \geq 0$

Considera la curva disegnata qui sotto:



- Di un punto del piano sappiamo che ha ascissa 2 e che appartiene alla curva. Quale ordinata può avere?

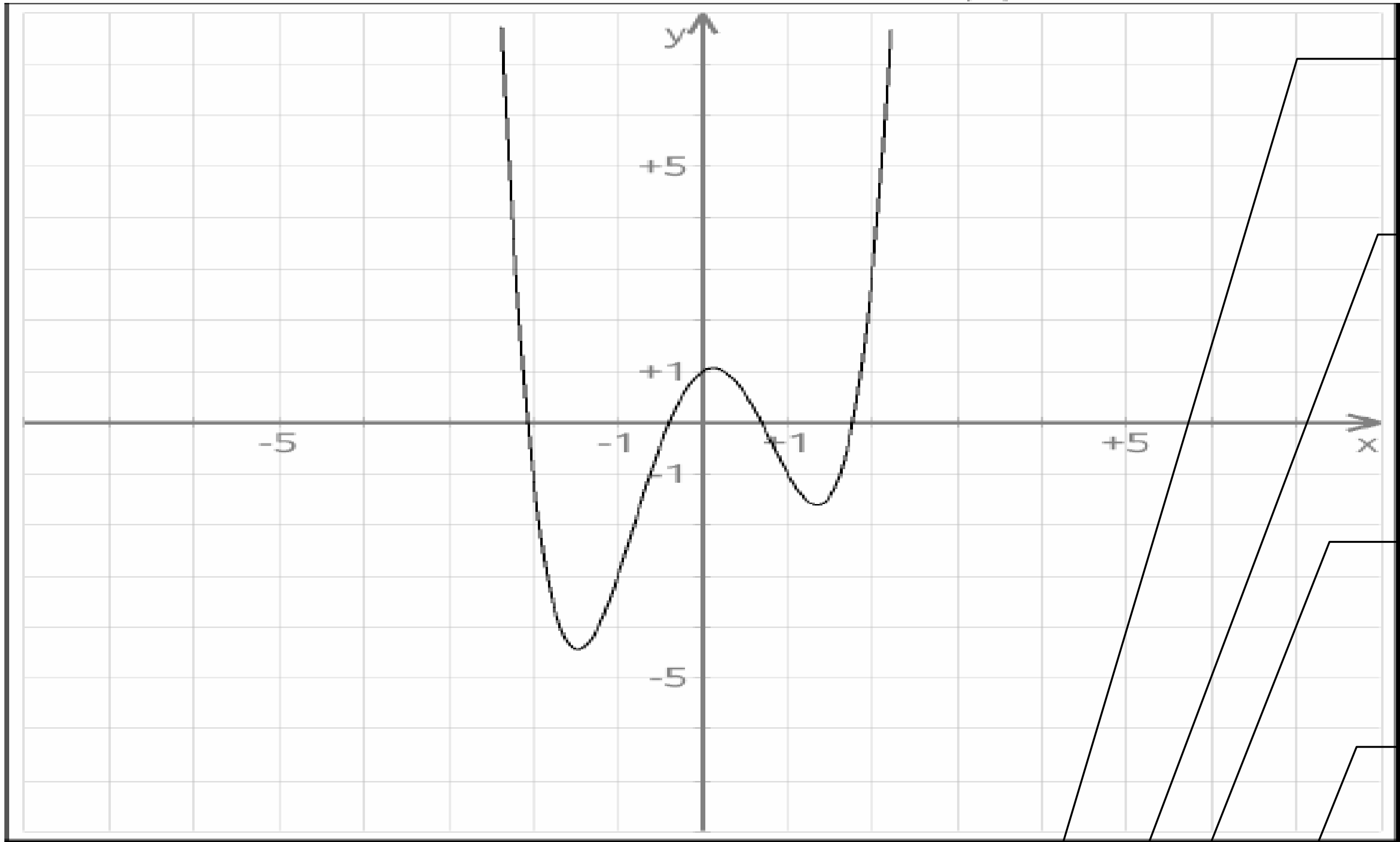
- Un punto del piano di ascissa 3 può appartenere alla curva? Se sì, quale può essere la sua ordinata?

- Un punto del piano di ordinata 1 può appartenere alla curva? Se sì, quale può essere la sua ascissa?

- Quale ascissa possono avere i punti che appartengono alla curva?

- Quale ordinata possono avere i punti che appartengono alla curva?

Considera il seguente grafico della funzione $f(x)$:



$f(x)=k$

$f(x)>k$

$f(x)=x+k$

$f(x)<x+k$

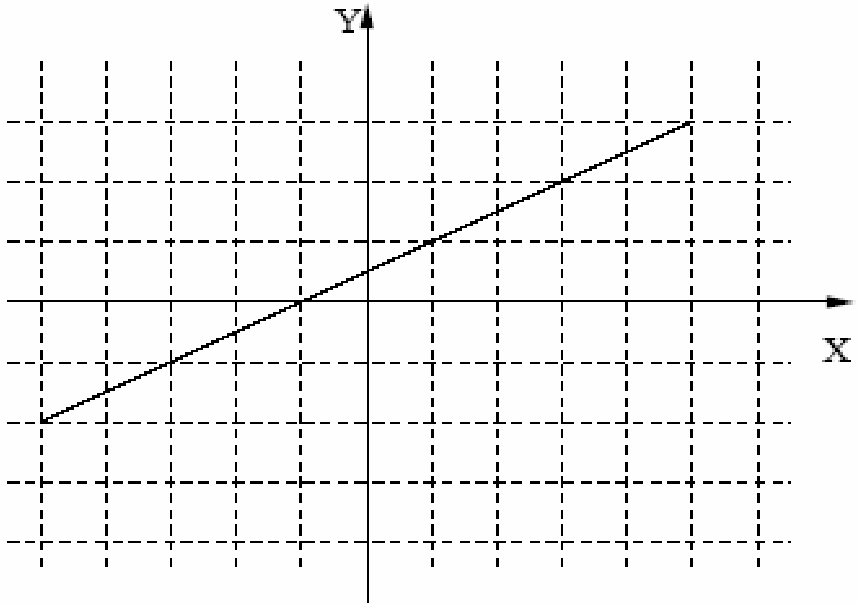
1. Discuti la risolubilità dell'equazione $f(x) = k$ (dove k è un numero reale fissato).

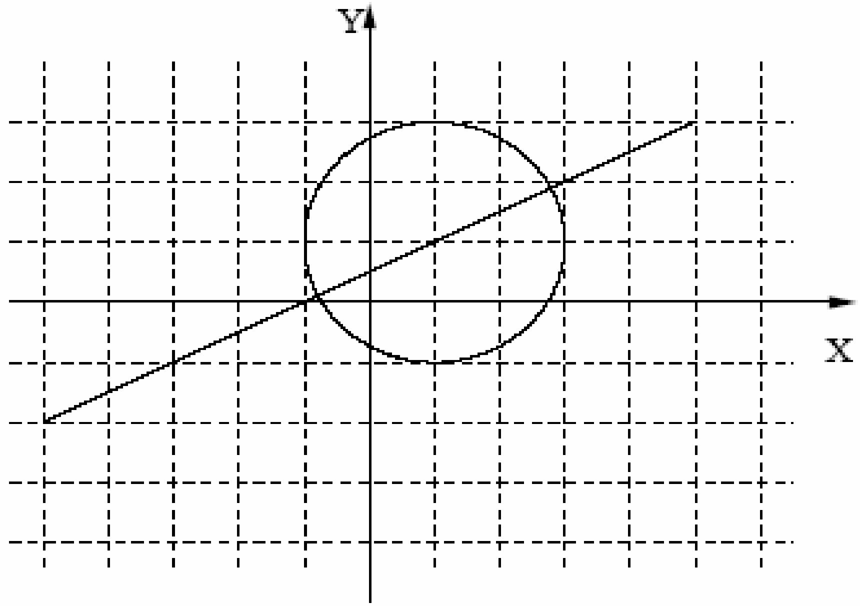
2. Discuti la risolubilità della disequazione $f(x) > k$ (dove k è un numero reale fissato).

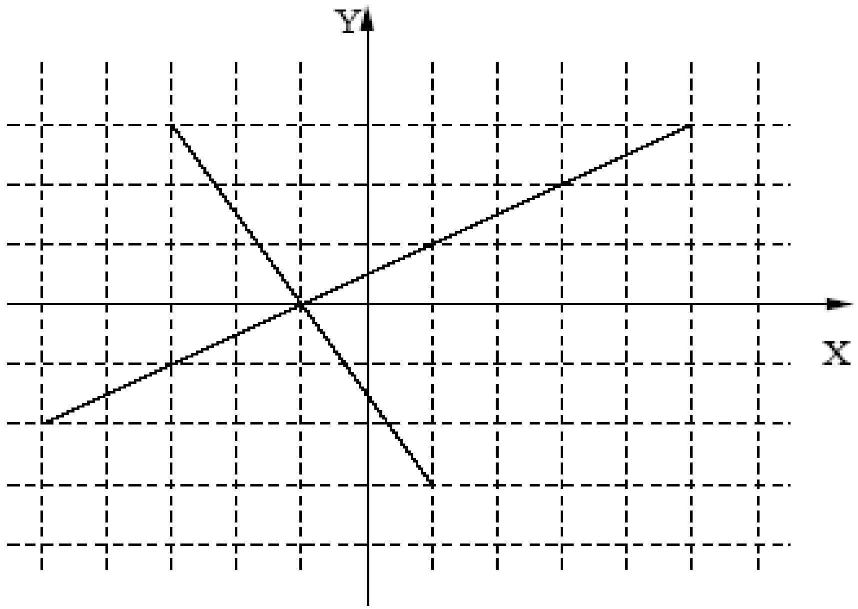
3. Discuti la risolubilità dell'equazione $f(x) = x + k$ (dove k è un numero reale fissato).

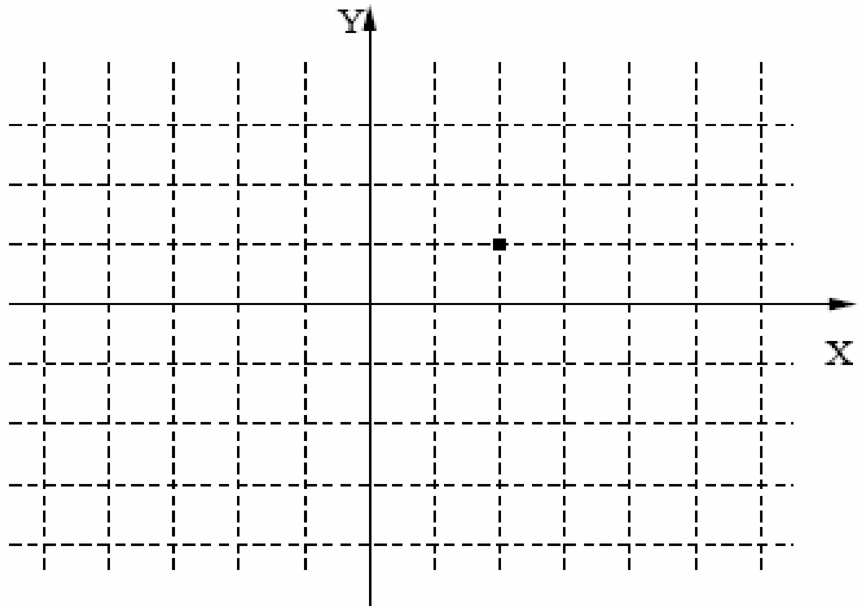
4. Discuti la risolubilità della disequazione $f(x) < x + k$ (dove k è un numero reale fissato).

Prova a scrivere equazioni e disequazioni le cui soluzioni siano proprio i punti del piano che appartengono alle quattro figure rappresentate qui di seguito:









- INSERIRE su
- A<b
- E
- An<bn
- Fatto con le funzioni (vedi Istituzioni)

Abilità linguistiche e trasversali

L'ATTENZIONE

Esempi

Sull’attenzione:

- In classe ogni persona che interviene deve ripetere brevemente l’intervento precedente
- Ascolto di un brano (musica, rumori, …)
- Osservazione di un’immagine
- …vedi ‘giochi di Kim’ degli scout e altri

Ciao! Da quando hai cambiato sede non ci si vede più!

Come sta tua madre? Mi ha detto Ornella che al consiglio d’istituto di mercoledì non c’eri, perché si era sentita di nuovo male …

Anch’io ho passato un periodo proprio pesante: Alessandro ha avuto la febbre alta per una settimana, e non c’era verso di fargliela calare e di capire cos’aveva. Dicevano un virus… sai quando non capiscono cos’è… Comunque fortunatamente è passata, virus o non virus…ed è già tornato a scuola. Sai com’è lui …

A proposito di scuola, hai sentito cos’è successo ieri? E’ caduto un pezzo di intonaco sulle scale. Meno male non era l’orario di entrata o di uscita, e non e’ successo niente di grave. A parte che ora la scuola e’ chiusa, e si parla di fare i doppi turni nell’altra sede. Al solito c’è chi la prende bene, tutto contento, e chi non sa come organizzarsi… Per me sarà proprio un problema.

Ora *facendo riferimento al vostro testo*, rispondete:

(1) Che lavoro fa chi parla?

(2) Che lavoro fa la persona con cui parla?

(3) Che lavoro fa il marito della persona che parla?

In questo incontro

- **Breve riassunto delle puntate precedenti…**
- **Il problem solving**
- **Implicazioni per il recupero:**
  - ✓ **Osservazioni generali**
  - ✓ **Materiali ed esperienze:**
  - → Atteggiamenti negativi
  - → Abilità linguistiche e trasversali
  - → Abilità metacognitive
  - → Come si studia la matematica:
    - Definizioni
    - Dimostrazioni

Abilità metacognitive

Una griglia utilizzata per le prove scritte

Prima di cominciare
Leggi gli esercizi.
Quale pensi che ti riesca meglio?
E quale peggio?
Quale pensi che richieda più tempo?
Quale meno?
In quali pensi di poter controllare i risultati,
in modo da essere sicuro di averlo fatto correttamente?
Ora puoi cominciare.

INIZIO ORE: ________

TESTO

FINE ORE: ________
Dopo aver finito
Come pensi di averlo fatto?
Su cosa basi la tua impressione? (hai controllato i passaggi,
ti sembra convincente il risultato, sai di saper fare quel tipo di esercizi, oppure....)
Pensando ad una valutazione di x punti per ogni esercizio,
quale voto pensi di poter prendere?
Eventuali osservazioni:

Un esempio di scheda per l'autovalutazione

Se hai anche un solo errore in un esercizio della casella a sinistra, riguarda l'argomento indicato nella corrispondente casella a destra.
Non procedere con i fogli successivi finché non hai completato correttamente questo!

Se hai fatto errori nell'esercizio ↓	**...riguarda l'argomento ↓**
1	distanza fra 2 punti
2; 3; 4; 5	vettori
6; 7; 8; 9; 10	prodotto scalare
11; 12; 13; 14; 15	equazione di un piano
16	distanza punto - piano
17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25	equazioni di una retta nello spazio

INSIEMI E LOGICA

Nome e cognome: ERIKA PIACENTINI

PRIMA di studiare	DOPO aver studiato
DATA: 19-9-96 ORE: 10:00 Pensi di essere preparato su questo argomento? ☐ sì ☒ poco ☐ per niente ☐ non so	DATA: 20/9/96 ORE: 16:00 Pensi di essere preparato su questo argomento? ☒ sì ☐ poco ☐ per niente ☐ non so Confronta questa risposta con quella che hai dato *quando hai finito* il questionario PRIMA. E' diversa? Sì

0. In questa unità utilizzeremo i seguenti simboli e/o vocaboli:

VOCABOLARIO

insieme appartenenza sottinsieme insieme vuoto unione intersezione

differenza prodotto cartesiano per ogni esiste implica

$\{1, 2, 3, 6, 9\}$ $x \in A$ $A \subset B$ $A \cup B$ $A \cap B$ $A \times B$ $A \setminus B$ $\emptyset$ $\forall$ $\exists$ $\Rightarrow$

Riporta nel riquadro qui sotto **i simboli e i vocaboli che non conosci:**

PRIMA	DOPO
$A \setminus B$ $A \times B$ prodotto cartesiano differenza	

I QUESTIONARI PRIMA/DOPO

1. Sono usati correttamente i simboli nelle seguenti espressioni? (le lettere maiuscole indicano insiemi, le minuscole elementi di tali insiemi)

PRIMA	**DOPO**
a] $A \in B$ si ☐ no ☐ non so ☐	**a] $A \in B$** si ☐ no ☐ non so ☐
b] $a \subset B$ si ☐ no ☐ non so ☐	**b] $a \subset B$** si ☐ no ☐ non so ☐
c] $A \cap B \cap C$ si ☐ no ☐ non so ☐	**c] $A \cap B \cap C$** si ☐ no ☐ non so ☐
d] $\{a\} \cup B$ si ☐ no ☐ non so ☐	**d] $\{a\} \cup B$** si ☐ no ☐ non so ☐
e] $a \cap B$ si ☐ no ☐ non so ☐	**e] $a \cap B$** si ☐ no ☐ non so ☐
Sei sicuro delle risposte che hai dato? Se no, di quali risposte non sei sicuro? Perchè?	Sei sicuro delle risposte che hai dato? Se no, di quali risposte non sei sicuro? Perchè?

2. E' vero o falso?

PRIMA	**DOPO**
a] $\{1,2,3,4\} = \{1,4,3,2\}$ vero ☐ falso ☐ non so ☐	**a] $\{1,2,3,4\} = \{1,4,3,2\}$** vero ☐ falso ☐ non so ☐
b] $\{3,3,5,7\} = \{3,5,7\}$ vero ☐ falso ☐ non so ☐	**b] $\{3,3,5,7\} = \{3,5,7\}$** vero ☐ falso ☐ non so ☐

PRIMA

Il questionario è finito.

Sono le ore: 21:55

Conta quante volte hai risposto "non so": 25

Conta su quante singole domande hai risposto di "non essere sicuro": 2

Adesso che hai finito, pensi di essere preparato su questo argomento?

☐ sì ☐ poco ☒ per niente ☐ non so

Confronta la risposta che hai dato ora con quella che hai dato all'inizio.

E' diversa? SÌ

Se sì, come mai? PENSAVO DI RICORDARE MEGLIO L'ARGOMENTO

In ogni caso, segna qui di seguito eventuali dubbi, incertezze, domande, che il questionario PRIMA ti ha provocato:

CHE COSA SONO I SIMBOLI: ∶ , CA , xRy

DOPO

Il questionario è finito.

Sono le ore: 18:45

Conta quante volte hai risposto "non so": 1

Conta su quante singole domande hai risposto di "non essere sicuro": 3

Controlla per ogni domanda quante volte hai dato risposte diverse fra il questionario PRIMA e quello DOPO.

Conta quante risposte diverse hai trovato: 2

Ti sembra di aver migliorato la tua preparazione? SI

Rispondi ancora: pensi di essere preparato su questo argomento?

☒ sì ☐ poco ☐ per niente ☐ non so

In ogni caso, segna ancora qui di seguito eventuali dubbi, incertezze, domande, che il questionario DOPO ti ha provocato:

Il questionario prima / dopo...

→ *non* è un test d'ingresso

→ ma uno *strumento di lavoro:*

- per lo studente
- per l'insegnante

↘ prende consapevolezza delle proprie conoscenze

↘ dirige in modo consapevole l'attenzione durante lo studio o la lezione

↘ riconosce i (piccoli) progressi

↘ dopo aver studiato, ha il senso del lavoro fatto

↘ prima della lezione, conosce le convinzioni degli studenti

↘ dopo la lezione, ne controlla gli effetti

↘ può correggere il tiro

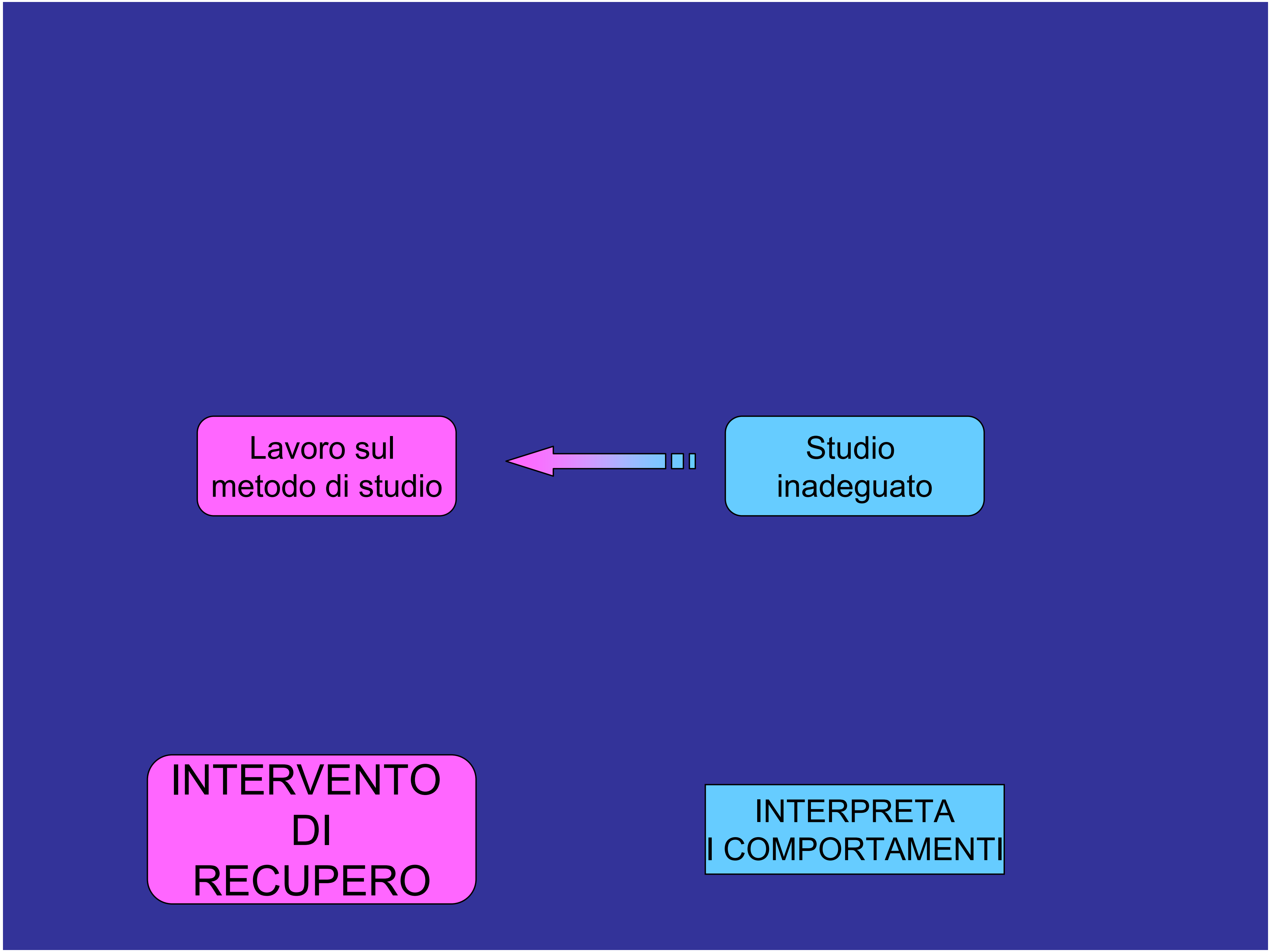
↘ riconosce i (piccoli) progressi

↘ ha il senso del lavoro fatto

In questo incontro

- ➢ **Breve riassunto delle puntate precedenti…**
- ➢ **Il problem solving**
- ➢ **Implicazioni per il recupero:**
  - ✓ **Osservazioni generali**
  - ✓ **Materiali ed esperienze:**
  - → Atteggiamenti negativi
  - → Abilità linguistiche e trasversali
  - → Abilità metacognitive
  - → Come si studia la matematica:
    - Definizioni
    - Dimostrazioni

Come si studia la matematica


Lavoro sul metodo di studio
Studio inadeguato
INTERVENTO DI RECUPERO
INTERPRETA I COMPORTAMENTI

Dal progetto P.O.R.T.A. e dai precorsi della Facoltà di Scienze

LINGUAGGIO E COMUNICAZIONE

PROBLEM SOLVING

Incontro:	CONTENUTI	ABILITA' TRASVERSALI
1	**NUMERI**	Definire. Dimostrare
2	**EQUAZIONI E DISEQUAZIONI**	Definire. Dimostrare.
3	**Trigonometria**	**SEGUIRE UNA LEZIONE PRENDERE APPUNTI**
4	Multiplo, funzione, funzione monotona	**DEFINIRE**
5	Aritmetica, …	**DIMOSTRARE**

Precorso: i 5 incontri

Definizioni

- Concept definition
- Concept image

In genere quando l'allievo deve richiamare / utilizzare / ricordare una definizione, fa riferimento all'immagine che ne ha costruito, e non alla definizione rigorosa.

Esempio: definizione di multiplo

Leggi attentamente la seguente definizione di multiplo di un numero intero tratta da un libro di testo universitario:

Se a,b sono elementi di Z, diremo che <u>b è un multiplo di a</u> se esiste un intero c tale che: $b = a \cdot c$

Ti sembra di aver capito la definizione?

<u>Se non l'hai capita</u>:

- Ci sono simboli che non conosci? Quali?
- Ci sono termini che non conosci? Quali?
- Ci sono espressioni che non conosci? Quali?

Rileggi la definizione e scrivi qui di seguito tutto quello che vorresti chiedere al professore che potrebbe aiutarti a capire.

Andrea dice: -6 è multiplo di 2 perché $2 \cdot (-3) = -6$

Barbara dice: no, perché -6 è più piccolo di 2 e quindi non può essere suo multiplo.

A chi dai ragione e perché?

Valerio dice: 3 non è multiplo di 2 perché $2 \cdot 0 = 0$, $2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$, ecc…

Riccardo dice: 3 è multiplo di 2 infatti: $2 \cdot 3/2 = 3$.

A chi dai ragione e perché?

Consideriamo i due insiemi

A= {1,2,3,4,5}

B= {0,1,2,3,4,5,6}

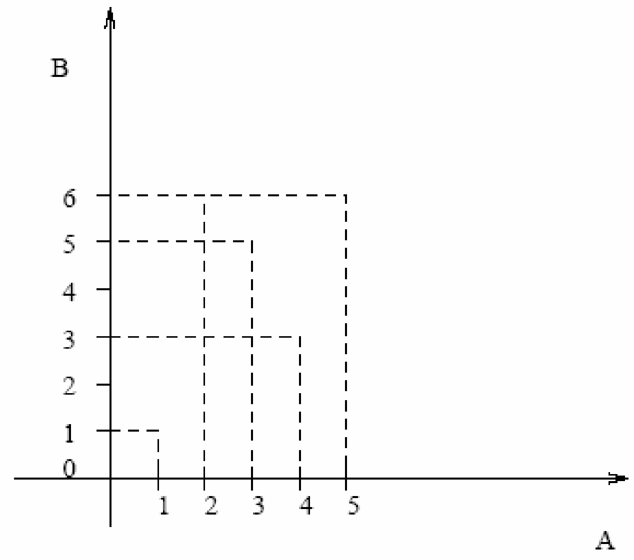
Quali dei seguenti grafici, tabelle, diagrammi, espressioni può rappresentare una funzione di A in B secondo la definizione data?

1.

se x è un elemento di A

$f(x) = x^3 + x + 1$

2.



3.

x	g(x)
1	4
2	2
3	0
4	3
5	3

4.

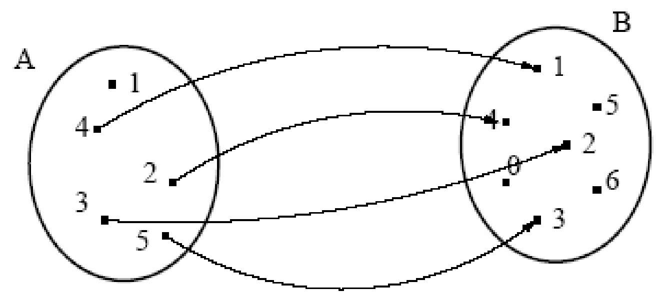
A \ B	0	1	2	3	4	5	6
1	×						×
2			×				
3					×		
4		×					
5				×			

5.

se x è un elemento di A

$$h(x) = \begin{cases} 2x+1 & se\ x \leq 2 \\ 1 & se\ x = 3 \\ x-1 & se\ x \geq 4 \end{cases}$$

6.



TEOREMI E DIMOSTRAZIONI: l'irrazionalità di $\sqrt{2}$

Dimostriamo che il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale, cioè non si può scrivere come rapporto tra due numeri interi.

Leggi attentamente

1) Dimostriamo *per*

2) Se $\sqrt{2}$ fosse razio... i interi m e n tali che:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (*)$$

3) Osserviamo che si può sempre supporre c... la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4) Dall'uguaglianza (*) segue che $m^2 = 2n^2$.

5) Poichè m^2 è pari, anche m è pari e quindi n deve essere dispari.

6) D'altra parte se poniamo $m = 2k$ abbia...

7) ... $^2 = 2k^2$.

8) ... ^{2} è pari.

9) Quindi anche n è pari.

10) Ma avevamo n dispari.

11) Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

Perché (vedi3) si può supporre che *m* e *n* siano primi tra loro?

Perché (vedi5) se m^2 è pari anche *m* è pari?

In quale punto avevamo dedotto che *n* è dispari?

In cosa consiste l'assurdo?

Rispondi ora alle seguenti domande:
a) Cosa vuol dire dimostrare per assurdo?
b) Ti ricordi altre dimostrazioni per assurdo?
c) Perchè (vedi 3) si può supporre che m e n siano primi tra loro?
d) Perchè (vedi 4) si può scrivere $m^2 = 2n^2$?
e) Perchè (vedi 5) se m^2 è pari anche m è pari?
f) Perchè (vedi 6) si può porre $m = 2k$?
g) Da cosa si ricava (vedi 7) che $2n^2 = 4k^2$?
h) Perchè (vedi 8) allora n^2 è pari?
i) Perchè (vedi 9) allora n è pari?
j) Hai già usato nella dimostrazione il ragionamento al punto precedente?
k) Al punto 10 si ricorda che n è dispari. In quale punto l'avevamo dedotto? Perchè?
l) In cosa consiste l'assurdo?
m) Perchè il teorema è dimostrato?

Considera il seguente problema:
Sappiamo che $M = 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^{24} \cdot 13^{18}$. *È vero o no che* $M + 5$ *è multiplo di* 10*?*
La risposta alla domanda è sì e qui di seguito trovi un testo in cui sono riportate le dimostrazioni di questo fatto di due studenti. Le frasi dei due studenti sono state mescolate a casaccio tra loro. Sei in grado di ricostruire i due ragionamenti originari, sapendo che erano diversi ed entrambi matematicamente accettabili?

- Un numero che finisce per 0 è divisibile per 10.
- Quindi $M + 5$ è il prodotto di 5 per un numero pari.
- Se aggiungiamo 5 a un numero che finisce con un 5, la sua ultima cifra diventa 0.
- Quindi $M + 5 = 5(K + 1)$.
- Quindi è multiplo di 10.
- Possiamo scrivere $M = 5K$.
- $K + 1$ è pari, dato che K è dispari.
- M è dispari e multiplo di 5, quindi la sua cifra di destra è un 5.

Qui di seguito sono riportati ENUNCIATO e DIMOSTRAZIONE di un teorema, leggi entrambi molto attentamente:

Teorema: La somma di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 4.

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi,
2. possiamo supporre $n < m$,
3. e quindi $m = n + 2$.
4. Possiamo inoltre porre $n = 2k + 1$,
5. quindi $m = 2k + 3$.
6. Allora $n + m = (2k+1)+(2k+3)=4(k+1)$.
7. Il teorema è quindi dimostrato.

L'enunciato del teorema è chiaro? Pensi di aver capito la dimostrazione data? Eventualmente quali passi non sono chiari? Scrivi cosa chiederesti per capire meglio il teorema.

Il teorema di Rolle

1. Scrivi l'enunciato del teorema.

2. Quali sono le ipotesi?

3. Qual e' la tesi?

4. L'ipotesi che la funzione sia continua in un intervallo chiuso e' necessaria?

Perche' ? Cosa succede se si suppone che f sia continua nell'intervallo aperto?

5. L'ipotesi che f(a)=f(b) e' necessaria?

Perche'?

6. L'ipotesi che f sia derivabile nell'intervallo aperto e' necessaria?

Perche'?

7. In quali punti della dimostrazione viene utilizzato il fatto che f e' continua in [a,b] ?

8. In quali punti della dimostrazione viene utilizzata l'ipotesi che f e' derivabile in (a,b) ?

9. In quali punti della dimostrazione viene utilizzata l'ipotesi che f(a)=f(b)?

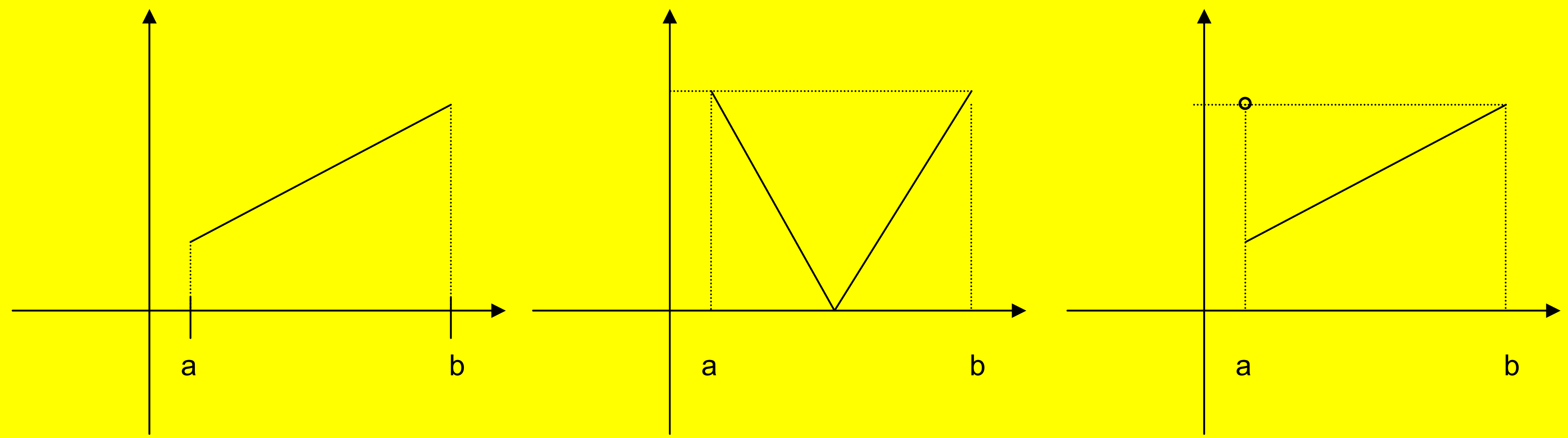
Il teorema di Rolle

10. La dimostrazione e' diretta o e' per assurdo?

11. Quali teoremi si sfruttano nella dimostrazione?

12. In quali teoremi successivi viene utilizzato il teorema di Rolle?

13. Osserva le seguenti figure: cosa ti suggeriscono, in relazione al teorema di Rolle?



Dimostrazioni: i commenti degli studenti

"L'incontro sulle dimostrazioni è stato il più interessante perché non avevo mai fatto un'attività del genere!"

"L'incontro che mi è piaciuto di più è stato quello sulla dimostrazione di teoremi perché mi affascinavano i ragionamenti."

"L'incontro sulle dimostrazioni è stato il più interessante perché dovevamo porci in prima persona davanti a domande di ragionamento e questo ha reso la lezione anche più divertente."

FINE